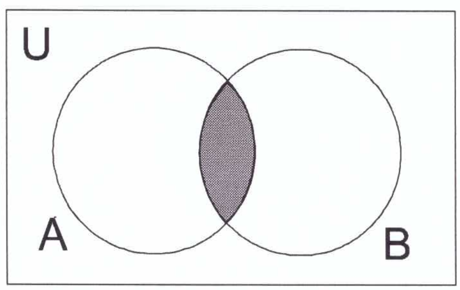
TECNOLOGICO NACIONAL DE MEXICO

Instituto Tecnológico de La Paz

CURSO PROPEDEUTICO DE

MATEMATICAS

TEORIA DE CONJUNTOS
ARITMETICA Y ALGEBRA



$A \cap B$

$$4x^3\left(2yx^3 - 6y^2 + \frac{5}{12}z^2x^7y^3 - \frac{3}{4}xz\right) =$$

$$= 8yx^6 - 24x^3y^2 + \frac{5}{3}z^2x^{10}y^3 - 3x^4z$$

AGOSTO DEL 2017

UNIDAD I

TEORIA DE CONJUNTOS

I.1. CONCEPTOS BASICOS DE LA TEORIA DE CONJUNTOS

CONJUNTO

Es una colección de objetos (elementos), bien definidos, que pueden ser de cualquier clase, como números, ríos, letras, etc.

EJEMPLOS

- El conjunto de números naturales
- El conjunto de los ríos de México
- El conjunto de las vocales
- Etc.

NOTACION

⇒ Los conjuntos se denotan por letras mayúsculas: A,B,C,D,...
⇒ Los elementos se denotan por letras minúsculas: a,b,c,d,e,...

FORMAS DE DESCRIBIR UN CONJUNTO

- FORMA CONSTRUCTIVA: Se define el conjunto describiendo la, o las propiedades necesarias para que se cumpla el hecho de pertenecer al conjunto.

EJEMPLOS

$$A = \{\, x\,/x\; es\; un\; número\; natural\; menor\; que\; 10\,\}$$

$$B = \{\, x\,/x\; es\; una\; de\; las\; tres\; primeras\; vocales\,\}$$

$$C = \{\, x\,/x\; es\; una\; letra\; de\; la\; palabra\; Ana\,\}$$

- FORMA TABULAR: Se define al conjunto enlistando los elementos del mismo.

EJEMPLOS

$$\mathrm{A} = \{\,1,2,3,4,5,6,7,8,9\,\}$$

$$\mathrm{B} = \{\,a,e,i\,\}$$

$$\mathrm{C} = \{\,a,n\,\}$$

CONJUNTOS ESPECIALES

- **Conjuntos Finitos**

Son aquellos que al contar sus elementos, dicho proceso tiene fin.

EJEMPLOS

$$\mathrm{C} = \{\, x \,/ x\; es\; una\; letra\; del\; alfabeto \,\}$$

$$\mathrm{D} = \{\, 2, 4, 6, 8 \,\}$$

- **Conjuntos Infinitos**

Son aquellos que contienen un número ilimitado de elementos.

EJEMPLOS

$$\mathrm{E} = \{\, x \,/ x\; es\; un\; número\; entero\; positivo \,\}$$

$$\mathrm{F} = \{\, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots \}$$

- **Conjunto Universal**

Es el conjunto de todos los elementos que están involucrados en una situación dada. Se denota por Ω, o U.

EJEMPLO

Si hablamos de los libros del centro de información del Instituto Tecnológico de La Paz, el universo sería el conjunto de todos los libros de ese centro de información. Si hablamos de libros de matemáticas, el conjunto universo sería el conjunto de todos los libros de matemáticas de ese centro, que contendría libros de álgebra, cálculo, geometría, etc. Pero si nuestra situación considera solo libros de cálculo, nuestro universo sería el conjunto de todos los libros de cálculo de ese centro.

NOTA: Como se observa el conjunto universal es concepto variable, que se determina por las condiciones de la situación que se este manejando.

- **Conjunto Vacío**

Es aquel conjunto que carece de elementos. Se denota ϕ, o $\{\}$.

EJEMPLO

$$\mathrm{G} = \{\, x \,/ x\; es\; un\; número\; natural\; negativo \,\} = \phi$$

RELACION DE PERTENENCIA

Es la relación que se da entre elementos y conjuntos. Se denota por $\in$.

EJEMPLO

Si $F = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$, se tiene :

$2 \in F$ (2 pertenece a F), $6 \in F$, $5 \notin F$ (5 no pertenece a F), $7 \notin F$

RELACION DE CONTINENCIA

Es la relación que se da únicamente entre conjuntos.

Un conjunto A es **subconjunto** del conjunto B, si, y solo si, cada elemento del conjunto A, es también un elemento del conjunto B, se denota $A \subset B$. Cuando el conjunto B tiene al menos un elemento que no pertenece al conjunto A, entonces el conjunto A, es **subconjunto propio** del conjunto B y es mas apropiado usar el símbolo $\subset$. Si dos conjuntos A y B son iguales entonces todo elemento de uno es también elemento del otro y así $A \subset B$, y $B \subset A$, en este caso se dice que A es **subconjunto impropio** de B y para esto se puede usar la notación $A \subseteq B$.

NOTA 1: Varios autores utilizan el símbolo $\subset$, indistintamente cuando el conjunto es propio o impropio, en este curso así lo haremos nosotros.

NOTA 2: Por definición el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto y todo conjunto es subconjunto de si mismo.

EJEMPLO:

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{x \mid x$ es un número real$\}$, y

$D = \{z \mid z - 1 = 4\}$

Tenemos:

$A \subset C$, $B \subset C$, $D \subset C$, $B \subset A$, $D \subset A$, $D \subset B$,

$\phi \subset A$, $\phi \subset B$, $\phi \subset C$, $\phi \subset D$, $A \subset A$, $B \subset B$, $C \subset C$, $D \subset D$

CARDINALIDAD

Es el número de elementos que tiene un conjunto, se denota $|A|$ o $n(A)$.

EJEMPLOS

Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $n(A) = |A| = 4$

$B = \{x \mid x$ una vocal$\}$, entonces $n(B) = |B| = 5$

CONJUNTO POTENCIA

Si A es un conjunto, entonces al conjunto de todos los subconjuntos de A, se le llama **conjunto potencia de A**, se denota P(A).

Si A Tiene *k* elementos, entonces P(A) tiene 2^k elementos.

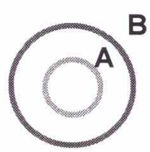
EJEMPLO

Si A = { 1, 2}, entonces P(A) = { ϕ, {1}, {2}, {1, 2} }, $2^k = 2^2 = 4$

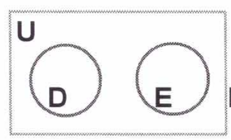
DIAGRAMAS DE VENN

Se usan para mostrar gráficamente las relaciones entre los conjuntos.

EJEMPLOS



$A \subset B$

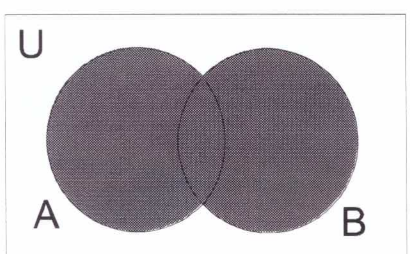


D y E son ***<u>Conjuntos</u> <u>Disjuntos</u>***

I.2. OPERACIONES CON CONJUNTOS

UNION

La unión de dos conjuntos A y B, es el conjunto de los elementos que pertenecen al conjunto A o que pertenecen a B, o que pertenecen a los dos conjuntos. Se denota A U B.



$$\boxed{A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ó } x \in B \}}$$

EJEMPLO

Sea M = { a, b, c, d, e } y N = { d, e, f, g }, hallar: M U N.

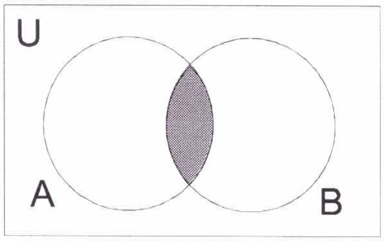
M U N = { a, b, c, d, e, f, g }

NOTA: Para la unión de conjuntos se cumple la propiedad conmutativa, esto es:

M U N = N U M = { a, b, c, d, e, f, g }

INTERSECCION

La intersección de dos conjuntos A y B, es el conjunto de los elementos que pertenecen al conjunto A y a B. Se denota $A \cap B$.



$$A \cap B = \{ x \mid x \in A , x \in B \}$$

EJEMPLO

Sea $M = \{ a, b, c, d, e \}$ y $N = \{ d, e, f, g \}$, hallar: $M \cap N$.

$$M \cap N = \{d, e \}$$

NOTA 1: Para la intersección de conjuntos se cumple la propiedad conmutativa, esto es:

$$M \cap N = N \cap M = \{d, e \}$$

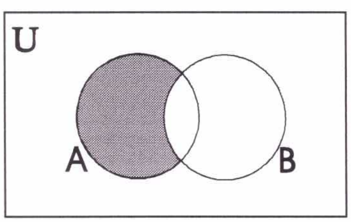
NOTA 2: Las operaciones **unión e intersección**, pueden generalizarse para tres o más conjuntos, así tenemos:

$$A \cup B \cup C = \{ x \mid x \in A \text{ ó } x \in B \text{ ó } x \in C \}$$

$$A \cap B \cap C = \{ x \mid x \in A , x \in B , x \in C \}$$

DIFERENCIA

La diferencia de dos conjuntos A y B, es el conjunto de elementos que pertenecen al conjunto A, pero no a B. Se denota $A - B$.



$$A - B = \{ x \mid x \in A , x \notin B \}$$

EJEMPLO: Sea $M = \{ a, b, c, d, e \}$ y $N = \{ d, e, f, g \}$, hallar: $M - N$.

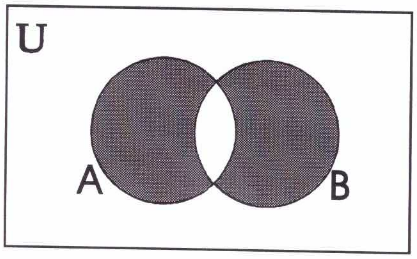
$$M - N = \{ a, b, c \}$$

NOTA: Para la diferencia de conjuntos no se cumple la propiedad conmutativa, esto es:

$$M - N = \{ a, b, c \} \neq N - M = \{ f, g \}$$

DIFERENCIA SIMETRICA

La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B, es el conjunto de elementos que pertenecen al conjunto A o B, pero no a ambos. Se denota $A \oplus B$.



$$A \oplus B = \{ x \mid (x \in A , x \notin B) \text{ ó } (x \notin A , x \in B) \}$$

EJEMPLO

Sea $M = \{ a, b, c, d, e \}$ y $N = \{ d, e, f, g \}$, hallar: $M \oplus N$.

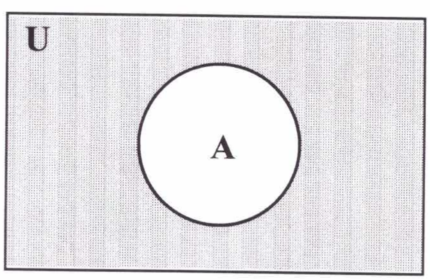
$$M \oplus N = \{ a, b, c, f, g \}$$

NOTA: Para la diferencia simétrica de conjuntos se cumple la propiedad conmutativa, esto es:

$$M \oplus N = N \oplus M = \{ a, b, c, f, g \}$$

COMPLEMENTO

Si U es un conjunto que contiene al conjunto A, entonces los elementos que pertenecen a U, pero no al conjunto A, ó sea U – A, se llama complemento de A. Se denota A' o A^c.



$$A' = \{ x \mid x \in U , x \notin A \}$$

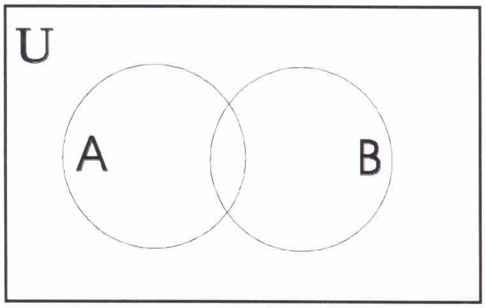
EJEMPLO

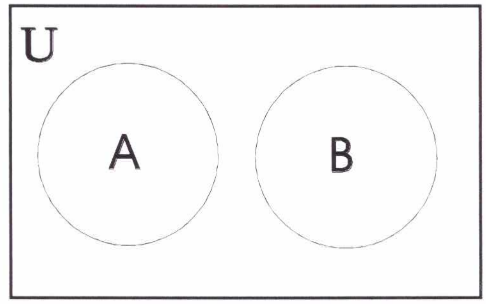
Sea $U = \{ x \mid x$ es un número natural menor de 8 $\}$ y $M = \{ 1, 3, 5, 7 \}$, hallar: M'.

$$M' = \{ 2, 4, 6, \}$$

EJERCICIOS:

1.- En cada uno de los siguientes diagramas de Venn sombrear: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, A'.





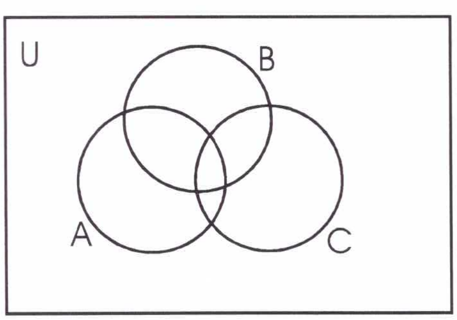
2.- Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ y $C = \{8, 9, 10\}$.

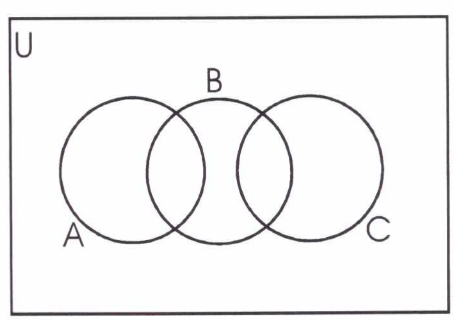
Hallar:

1. $A \cup B$
2. $B \cap C$
3. $B \cup C$
4. $A - B$
5. A'
6. $A' - C$
7. $A' \cup (B \cap C)$
8. $A \cup (B \cap C)$
9. $A \cap (B \cup C)$
10. $(A - B) \cup C$
11. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

3.- En cada uno de los siguientes diagramas de Ven sombrear:

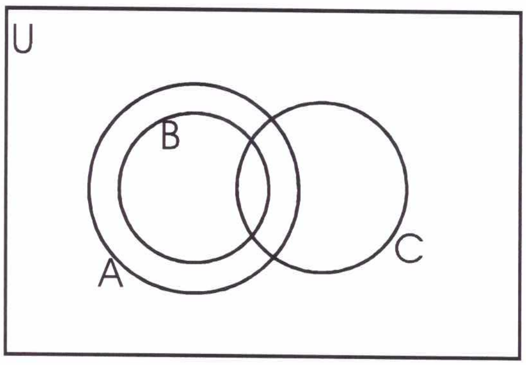
$A \cup (B \cap C)$, $A \cap (B \cup C)$, $(A - B) \cup C$, y $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

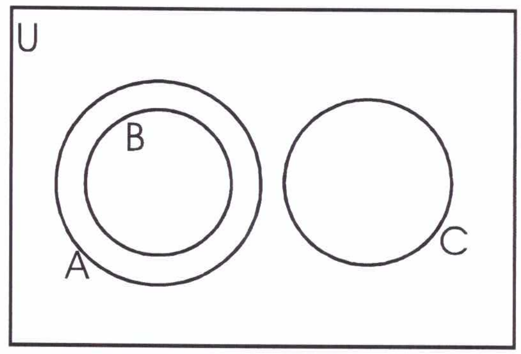




4.- En cada uno de los siguientes diagramas de Venn sombrear:

$A \cup (B - C)$, $A' \cap (B \cup C)$, $(A - B) \cap C'$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, $(A \cap B) - (A \cap C)$.





5.- Sea $U = \{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$, $A = \{ a, c, e, f, g, h \}$, $B = \{ b, d, f, g, \}$ y $C = \{ f, g, h \}$.

Hallar:

1. $A \cup B$
2. $B \cap C$
3. $(B \cap C)'$
4. $B \cup C$
5. $A \cup C$
6. $B - C$
7. A'
8. B'
9. C'
10. $A' - C'$
11. $A' \cup B'$
12. $(A - B) - C$
13. $(A - B)' - C$
14. $A' \cup (B \cap C)$
15. $A' \cup (B \cap C)'$
16. $A \cup (B \cap C)$
17. $A \cap (B \cup C)$
18. $(A - B) \cup C$
19. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
20. $(A \cup B)' \cap (A \cup C)'$
21. $A' \cap (A - B)'$

UNIDAD II

OPERACIONES CON NUMEROS REALES

II.1. EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES

LOS NUMEROS NATURALES

Son aquellos números utilizados para contar: $N = \{1, 2, 3, 5, \ 6, 7, \ldots\}$

Contar un conjunto es coordinar sus elementos con una parte de la serie de los números naturales comenzando por el 1.

Cuando contamos los elementos de un conjunto (sin importar el orden), el número que corresponde al **último** elemento se llama **número cardinal** del conjunto.

EJEMPLO: El número cardinal del conjunto CUADERNO es 8 porque

C	U	A	D	E	R	N	O
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
1	2	3	4	5	6	7	**8**

C	U	A	D	E	R	N	O
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
8	7	6	5	4	3	2	1

El número cardinal de un conjunto representa el número de elementos del conjunto

C	U	A	D	E	R	N	O
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
2	**8**	1	3	4	7	5	6

Cuando se cuentan los elementos de un conjunto, el número natural que corresponde **a cada elemento** del conjunto se llama **número ordinal** de dicho elemento.

EJEMPLO: Al contar de izquierda a derecha las letras de la palabra VICTOR tenemos que, el número ordinal de la letra V es el 1, o sea, la V es el **primer** elemento; el número ordinal de la I es el 2, o sea, que la I es el **segundo** elemento; el número ordinal de la C es el 3, o sea la C es el **tercer** elemento, etc.

Si contamos de derecha a izquierda las letras de la palabra VICTOR tenemos que el orden que le corresponde a cada letra cambia, por ejemplo el número ordinal de la letra V es 6, o sea que la V es el **sexto** elemento; el número ordinal de la letra I es 5, o sea que la I es el **quinto** elemento, etc.

El número ordinal nos indica el orden en que se encuentran los elementos de un conjunto ordenado.

Cifras o guarismos son los signos que se utilizan para representar los números.

Número dígito es el que consta de una sola cifra, como 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

NUMEROS ENTEROS

Es la unión de los enteros positivos, el cero y los enteros negativos

$$\{\ldots,-3,-2,-1\} \cup \{0\} \cup \{1,2,3,\ldots\}$$

$$Z = = \{\ldots,\mathbf{-3},\mathbf{-2},\mathbf{-1},\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\ldots\}$$

NUMEROS RACIONALES

DEFINICION: **Números racionales** Son los números que se pueden escribir como la razón de dos números enteros, siempre y cuando el denominador sea diferente de cero.

$$\boldsymbol{Q = \left\{\frac{x}{x} = \frac{m}{n}, m, n \in Z, n \neq 0\right\}}$$

La razón de dos enteros nos puede dar como resultado:

1. ***Un entero***: 8/2 = 4, −16/4 = −4, 0/(−15) = 0, etc.
2. ***Un número decimal finito***: 1/2 = 0.5, −4/5 = − 0.8, 3/4 = 0.75, etc.
3. ***Un número decimal periódico infinito***: 13/11 = 1.1818..., 3/7 = 0.4285714285714..., −10/3 = −3.333..., etc.

NOTA: No se contemplan expresiones en las cuales el denominador es cero como: $\frac{3}{0}, \frac{20}{0}, -\frac{5}{0}$, etc., porque se consideran indefinidas.

NUMEROS IRRACIONALES

Son los números reales que no se pueden expresar como la razón de dos enteros.

$$Q' = \left\{ \frac{x}{x} \text{ es un número decimal no periodico infinito} \right\}$$

EJEMPLOS: $\sqrt{2} = 1.4142135623..,$ $\sqrt{3} = 1.732050808..,$ $\sqrt{5} = 2.236067977...,$
$\sqrt[3]{7} = 1.912931183..,$ $\pi = 3.141592654..,$ $e = 2.718281828..,$ etc.

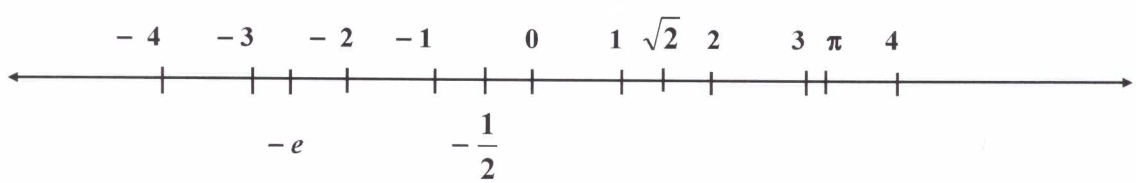
NUMEROS REALES

DEFINICION: Si consideramos el conjunto de todos los números racionales e irracionales formamos el conjunto de los ***números reales.***

$$R = Q \cup Q'; \quad N \subset Z \subset Q \subset R; \quad Q' \subset R; \quad Q \cap Q' = \varnothing.$$

RECTA NUMERICA

Los números reales, pueden ser vistos como rótulos de puntos que están a lo largo de una recta horizontal. Miden la distancia a la derecha o a la izquierda (distancia dirigida), desde un punto fijo llamado origen y marcado con cero "0". Aunque no se tenga la posibilidad de mostrar todos los rótulos, a cada punto le corresponde un único número real y todo número real se puede representar como un punto de la recta numérica, es decir, existe una correspondencia biunivoca entre los puntos de la recta y los números reales. A los números sobre la recta se les llama coordenadas del punto. La línea recta coordenada que se obtiene se llama ***recta real***.



AXIOMAS DE CAMPO Y ORDEN DE LOS NUMEROS REALES:

Simbología:

$\forall$ (cuantificador universal, que se lee "para todo elemento")

$\exists$ (cuantificador existencial, que se lee "existe al menos un elemento")

$\ni$ (simbolo propositivo, que se lee "tal que")

El sistema de los números reales es un conjunto $\Re$ y *dos operaciones, adición y multiplicación y una relación de orden,* denotada por $<$ y leída " es menor que", que satisface los siguientes axiomas:

A_1: $\forall$ a, b $\in R$, a + b $\in R$ (estabilidad o cerradura)

A_2: $\forall$ a, b $\in R$, a + b = b + a (ley conmutativa)

A_3: $\forall$ a, b, c $\in R$, (a + b) + c = a + (b + c) (ley asociativa)

A_4: $\exists$ " 0 " $\ni$ $\forall$ a $\in R$, a + 0 = a = 0 + a (existencia y unicidad del elemento neutro aditivo)

A_5: $\forall$ a $\in R$, $\exists$ "$-$ a " $\ni$ (a) + ($-$ a) = 0 = $-$ a + a (existencia y unicidad del inverso aditivo)

M_1: $\forall$ a, b $\in R$, a $\cdot$ b $\in R$ (estabilidad o cerradura)

M_2: $\forall$ a, b $\in R$, ab = ba (ley conmutativa)

M_3: $\forall$ a, b, c $\in R$, (ab) c = a (bc) (ley asociativa)

M_4: $\exists$ " 1" $\ni$ $\forall$ a $\in R$, a $\cdot$ 1 = 1 $\cdot$ a = a (existencia y unicidad del elemento neutro multiplicativo)

M_5: $\forall$ a $\in R$, a $\neq$ 0 , $\exists$ a^{-1}, $\ni$ $a\,a^{-1} = 1 = a^{-1}a$ (existencia y unicidad del inverso multiplicativo)

D: $\forall$ a, b, c $\in R$, a (b + c) = a b + a c y (b + c) a = b a + a c (ley distributiva)

O_1: $\forall$ a, b $\in R$, una y solamente una de las siguientes relaciones se verifica:

a < b; a = b; b < a (ley de tricotomía)

O_2: Si a < b & b < c , entonces a < c (ley transitiva)

O_3: Si a < b, $\Rightarrow$ $\forall$ c $\in$ R, a + c < b + c (ley aditiva)

O_4: Si a < b, 0 < c $\Rightarrow$ a c < b c (ley multiplicativa)

O_5: Si a < b, c < 0 $\Rightarrow$ a c > b c (ley multiplicativa)

NOTA: Las propiedades de orden, también se cumplen para la *relación* **>**, que se lee "mayor que", así, como también para las *relaciones* $\leq$ o $\geq$, que se leen "menor o igual que" y "mayor o igual que", respectivamente.

SUBCONJUNTOS ESPECIALES DE LOS NUMEROS NATURALES

DEFINICION: Si k $\in$ N, entonces { k, 2k, 3k, 4k, 5k, 6k, ... }, se llama ***conjunto de todos los múltiplos de k***. Cualquier elemento de este conjunto se llama múltiplo de k.

EJEMPLOS

- El conjunto de los múltiplos de 3 es { 3, 6, 9, 12, 15, 18, ... }
- El conjunto de los múltiplos de 4 es {4, 8, 12, 16, 20, 24, ...}

La **divisibilidad** es la parte de la Aritmética que estudia las condiciones que deben reunir dos números para que uno de ellos sea dividido de manera exacta entre el otro; estas condiciones se llaman **caracteres** o **criterios de divisibilidad**.

- Todo número es divisible entre **uno**.
- Todo número terminado en **cero** o cifra **par** es divisible entre **2**
- Si la suma de las cifras que forman un número es divisible entre **3**, entonces todo el número es divisible entre **3**.
- Todo número terminado en **cero** o en **cinco** es divisible entre **5**.
- Si la suma de las cifras que forman un número es divisible entre **9**, entonces todo el número es divisible entre **9**.

DEFINICION: Si $x \in \mathrm{N}$, pero $x \neq 1$ y si x no es divisible entre ningún número natural diferente de 1 ó de x mismo, entonces x se llama ***número primo***.

- ***Conjunto de números primos***: { 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ... }

Para formar una tabla de los números primos inferiores a cierto límite se usa el método llamado **criba de Eratóstenes**, la cual consiste en lo siguiente: se escribe la serie de los números naturales hasta el número que se quiera, supongamos, como ejemplo, hasta 100. A continuación se tachan los números que son múltiplos de los números primos, principiando con 2, 3, ...

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Teorema de Eratóstenes (Criterio para conocer si un número es primo.)

Un número es primo si no es divisible entre ninguno de los números primos cuyo cuadrado sea menor que dicho número.

EJEMPLO: Determinar si el número 41 es primo.

$$\begin{array}{c} 2^2 = 4 \\ 3^2 = 9 \\ 5^2 = 25 \\ \hline 7^2 = 49 \end{array}$$

41 **no** es divisible entre 2, 3, 5, por lo tanto, **es un número primo.**

$$\boxed{4, 9, 25 < 41}$$

DEFINICION: Si $x \in$ N, pero $x \neq 1$, y x no es número primo, entonces, x se llama ***número compuesto***.

- ***Conjunto de números compuestos***: { 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, ... }

NOTA 1: El número 1, es el único número natural que no se considera ni primo ni compuesto, así como el numero 2, es el único número par que es primo.

NOTA 2: Siempre es posible escribir un número compuesto como un producto de factores primos de forma única. Al proceso de descomponer un número en factores, se llama **factorización**.

EJEMPLOS: $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$, $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

REGLA: Para descomponer un número en sus factores primos, se comienza a dividir el número dado por el menor divisor primo posible. Después de realizar esta operación, se continua el procedimiento hasta obtener el cociente 1.

EJEMPLO: Descomponer en sus factores primos 48.

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$$

EJERCICIOS: Descomponer en sus factores primos: 64, 91, 96,121,204,160,169,289,306,385

DEFINICION: ***Máximo común divisor*** de dos o más números, es el mayor número que los divide a todos exactamente, se denota m.c.d.

EJEMPLO: 18 y 24 son divisibles por 2, por 3 y por 6. Pero no hay otro número mayor que 6 que divida a 18 y 24. Por lo tanto: **6 es el m.c.d. de 18 y 24**.

M.C.D. DE VARIOS NÚMEROS POR DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

- Para halla el m.c.d. de varios números, se descomponen los números dados en sus factores primos y el m.c.d. se forma con el producto de los factores primos comunes con su menor exponente.

EJEMPLO: Hallar el m.c.d. de: 1800, 420, 1260 y 108

1800	2	420	2	1260	2	108	2
900	2	210	2	630	2	54	2
450	2	105	3	315	3	27	3
225	3	35	5	105	3	9	3
75	3	7	7	35	5	3	3
25	5	1		7	7	1	
5	5			1			
1							

$1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

$108 = 2^2 \cdot 3^3$

por lo tanto el m.c.d. es: $2^2 \cdot 3 = 12$

EJERCICIOS: Hallar por descomposición en factores primos el m.c.d. de:

a) 425, 800, 950 **Sol. 25**   b) 54, 76, 114, 234 **Sol. 2**   c) 464, 812, 870 **Sol. 58**

d) 98, 294, 392, 1176 **Sol. 98**   e) 1560, 2400, 5400, 6600 **Sol. 120**

f) 500, 560, 725, 4350, 8200 **Sol. 5**

DEFINICION: El ***mínimo común múltiplo*** de dos o más números, es el menor número que contiene un número exacto de veces a cada uno de ellos. Se denota **m.c.m.**

EJEMPLO:

72 contiene exactamente a 9 y 6
36 contiene exactamente a 9 y 6
18 contiene exactamente a 9 y 6

Pero no hay un número menor que 18 que pueda ser dividido exactamente entre 9 y 6.Entonces: **18 es el m.c.m. de 9 y 6**

M.C.M. DE VARIOS NÚMEROS

- Para hallar el m.c.m. de varios números, se descomponen los números en sus factores primos y el m.c.m. se forma con el producto de los factores primos comunes y no comunes, afectados de su mayor exponente.

EJEMPLO: Hallar el m.c.m. de 50, 80, 120, 300

50	2	80	2	120	2	300	2
25	5	40	2	60	2	150	2
5	5	20	2	30	2	75	3
1		10	2	15	3	25	5
		5	5	5	5	5	5
		1		1		1	

$50 = 2 \cdot 5^2$

$80 = 2^4 \cdot 5$

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

$\Rightarrow$ m.c.m. $= 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 = 1200$

EJERCICIOS: Hallar por descomposición de factores primos el m.c.m. de:

a) 5, 7, 10, 14 **Sol. 70**   b) 100, 500, 700, 1000 **Sol. 7000**   c) 24, 48, 56, 168 **Sol. 336**

d) 18, 24, 40 **Sol. 360**   e) 14, 28, 30, 120 **Sol. 840**

II.2. OPERACIONES CON NUMEROS REALES

SIGNOS

DEFINICION: El **signo** de un número real se considera positivo, si el número es positivo, o negativo si el número es negativo. Dos números reales *tienen el mismo signo*, si ambos son positivos o ambos son negativos. *Tienen signos opuestos* si uno es positivo y el otro negativo. Los signos se clasifican en:

$$1.\quad \text{Signos de Operación}\begin{cases}\text{de la suma}: + \\ \text{de la resta}: - \\ \text{de la multiplicación}: "\times", "(\,)", "\cdot", \text{suele omitirse a veces "ab"} \\ \text{de la división}: "\div", "\frac{a}{b}" \\ \text{de la potenciación}: \textit{el exponente} \\ \text{de la radicación}: \sqrt{\;}, \sqrt[n]{\;}\end{cases}$$

$$2.\quad \text{Signos de relación}\begin{cases} = \text{"igual a"} \\ > \text{"mayor que"} \\ < \text{"menor que"} \\ \geq \text{"mayor o igual que"} \\ \leq \text{"menor o igual que"}\end{cases}$$

$$3.\quad \text{Signos de agrupación}\begin{cases}(\;)\ \text{parentesis ordinario} \\ [\;]\ \text{parentesis angular o corchete} \\ \{\;\}\ \text{llaves}\end{cases}$$

LEYES DE LOS SIGNOS (para productos y cocientes)

$i)$ Si a y b tienen el mismo signo, entonces ab y $\frac{a}{b}$ son positivos.

$$\left.\begin{array}{l}(+)(+) \\ (-)(-) \\ \\ \frac{(+)}{(+)},\ \frac{(-)}{(-)}\end{array}\right\} = +$$

$ii)$ Si a y b tienen signos opuestos, entonces ab y $\frac{a}{b}$ son negativos.

$$\left.\begin{array}{l}(+)(-) \\ (-)(+) \\ \\ \frac{(+)}{(-)},\ \frac{(-)}{(+)}\end{array}\right\} = -$$

EJERCICIOS:

- $(+)\,(-)\,(-)\,(+)\,(-)\,(+) = \quad -$
- $(+)\,(+)\,(-)\,(+)\,(-)\,(+) = \quad +$
- $(+)\,(-)\,(+)\,(+)\,(+)\,(+) = \quad -$
- $(-)\,(-)\,(-)\,(-)\,(-)\,(-) = \quad +$
- $(-)\,(-)\,(-)\,(-)\,(-)\,(+) = \quad -$
- $(+)\,(-)\,(-)\,(-)\,(-)\,(+) = \quad +$
- $(+)\,(+)\,(+)\,(+)\,(-)\,(+) = \quad -$
- $\dfrac{(+)(-)(-)(+)(+)}{(-)(-)(-)(+)} = -$

OPERACIONES ARITMETICAS

Las operaciones aritméticas son siete: ***suma o adición, resta o substracción, multiplicación, división, potenciación, radicación*** y ***logaritmación***.

EJERCICIOS: Efectuar las operaciones siguientes:

- $8 - 3 + 4 - 1 + 2$ **SOL: 10**
- $(7 - 2) + (5 + 4) - (3 - 2)$ **SOL: 13**
- $15 + [\,9 - (\,3 + 2\,)\,]$ **SOL: 19**
- $150 - [\,18 + (\,5 - 3\,) + (\,6 - 2\,)\,]$ **SOL: 126**
- $800 - [\,45 + \{\,(\,8 - 4\,) + (\,7 - 2\,)\,\}\,]$ **SOL: 746**
- $[(6 - 4) - (3 - 2)] - [(9 - 7) - (6 - 5)]$ **SOL: 0**
- $5 + 3\times 4 - 2\times 7$ **SOL: 3**
- $(\,5 + 3\,)2 + 3(\,6 - 1\,)$ **SOL: 31**
- $3(\,8 - 1\,) + 4(\,3 + 2\,) - 3(\,5 - 4\,)$ **SOL: 38**
- $(\,8 - 2 + 6 - 3\,)5$ **SOL: 45**
- $\dfrac{15 + 20 + 30}{5}$ **SOL: 13**
- $\dfrac{15\times 20\times 30}{5}$ **SOL: 1800**
- $\dfrac{(-15)(10)(-14)}{(21)(-4)(-5)}$ **SOL: 5**

TAREA: Efectuar las operaciones siguientes:

- $11 - 4 + 13 - 2 - 6 + 3 =$ **SOL: 15**
- $(11 - 5) - (9 - 3) =$ **SOL: 0**
- $-[-3 + 2(-4 + 1) - 6] =$ **SOL: 15**
- $-[-(2 - 1) + 5(3 + 2)] =$ **SOL: –24**
- $18 - 3 \text{ x } 2 - (-3 + 5) =$ **SOL: 10**
- $3[-(-1 - 3) + 5(6 - 1)] =$ **SOL: 87**
- $\dfrac{15 - 10 + 20}{5} =$ **SOL: 5**
- $\dfrac{5 \times 9 \times 8}{3} =$ **SOL: 120**
- $\dfrac{8 \times 6 - 7 \times 4 + 5 \times 8}{2} =$ **SOL: 30**
- $\dfrac{(-5)(6)(-1)}{(-3)(2)} =$ **SOL: – 5**

NUMEROS FRACCIONARIOS

Términos de la fracción o quebrado: $\dfrac{Numerador}{Denominador}$

CLASES DE FRACCIONES

- *Fracciones Comunes*: Son aquellas cuyo denominado r no es la unidad
  - seguida de ceros
    - Fracción propia
    - Fracción igual a la unidad
    - Fracción impropia
  - como : $\dfrac{3}{4}, \dfrac{7}{8}, \dfrac{9}{13}$, etc.
- *Fracciones decimales*: Son aquellas cuyo denominado r es la unidad
  - seguida de ceros
    - Fracción propia
    - Fracción igual a la unidad
    - Fracción impropia
  - como : $\dfrac{7}{10}, \dfrac{9}{100}, \dfrac{11}{1000}$, etc.

FRACCION PROPIA: Es aquella cuyo numerador es menor que el denominador.

EJEMPLOS: 2/3, 3/4, 5/7, en cada caso la expresión es menor que 1.

FRACCION IGUAL A LA UNIDAD: Es aquella cuyo numerador es igual al denominador.

EJEMPLOS: 6/6, 7/7, 8/8, en cada caso la expresión es igual a 1.

FRACCION IMPROPIA: Es aquella cuyo numerador es mayor que el denominador.

EJEMPLOS: 3/2, 4/3, 7/5, en cada caso la expresión es mayor que 1.

NUMERO MIXTO: Es el que consta de una parte entera y una fracción propia.

EJEMPLOS: $1\frac{2}{3}$, $4\frac{3}{5}$, etc.

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

- Si tenemos varias fracciones que tienen igual denominador, es mayor la que tiene mayor numerador.

EJEMPLO: De 7/4, 5/4, 3/4 es mayor 7/4

NOTA: Estas fracciones representan partes iguales de la unidad, o sea cuartos; luego será mayor la que contenga mayor número de partes, que es 7/4 .

- Si tenemos varias fracciones que tienen igual numerador, es mayor la que tiene menor denominador.

EJEMPLO: De 2/3, 2/5, 2/7, es mayor 2/3

- Si a los dos términos de una fracción propia se suma un mismo número, la fracción que resulta es mayor que la primera.

EJEMPLO: $\frac{5}{7}$ sumar 2 $\Rightarrow$ $\frac{5+2}{7+2}=\frac{7}{9}$ $\Rightarrow$ $\frac{7}{9}>\frac{5}{7}$

- Si a los dos términos de una fracción propia se resta un mismo número, la fracción que resulta es menor que la primera.

EJEMPLO: $\frac{5}{7}$ restar 2 $\Rightarrow$ $\frac{5-2}{7-2}=\frac{3}{5}$ $\Rightarrow$ $\frac{3}{5}<\frac{5}{7}$

- Si a los dos términos de una fracción impropia se suma un mismo número, la fracción que resulta es menor que la primera.

EJEMPLO: $\frac{7}{5}$ sumar 2 $\Rightarrow$ $\frac{7+2}{5+2}=\frac{9}{7}$ $\Rightarrow$ $\frac{9}{7}<\frac{7}{5}$

- Si a los dos términos de una fracción impropia se resta un mismo número, la fracción que resulta es mayor que la primera.

EJEMPLO: $\frac{7}{5}$ restar 2 $\Rightarrow$ $\frac{7-2}{5-2}=\frac{5}{3}$ $\Rightarrow$ $\frac{5}{3}>\frac{7}{5}$

- Si los dos términos de una fracción se multiplican o dividen por un mismo número, la fracción no varía.

EJEMPLO: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{6}{12}=\frac{24}{48}$ $\qquad$ $\frac{90}{150}=\frac{18}{30}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

NOTA: Las fracciones anteriores tienen diferente forma pero igual valor, por lo que se denominan ***fracciones equivalentes***.

EJERCICIOS:

1) Diga cual de las fracciones siguientes es mayor y cual menor y porque:

   a) 7/10, 7/16, 7/19, 7/23 $\qquad$ b) 5/6, 11/6, 13/6, 19/6

2) Aumenta o disminuye 8/13, a) si se suman 5 a los dos términos, b) si se restan 3.

3) Aumenta o disminuye 16/11, a) si se suman 6 a los dos términos, b) si se restan 5.

FRACCIONES DECIMALES

Para escribir una fracción decimal en notación decimal se sigue el principio fundamental de la numeración decimal escrita, según el cual **toda cifra escrita a la derecha de otra representa unidades diez veces menores que las que representa la anterior**.

EJEMPLO: $\frac{7}{10}$ se escribe 0.7; $\qquad$ $\frac{11}{100}$ se escribe 0.11; $\qquad$ $\frac{31}{1000}$ se escribe 0.031

Regla para escribir un número decimal:

- Para *escribir un decimal,* se escribe la parte entera si la hay, si no la hay, se escribe un cero y en seguida el punto decimal. Después se escriben las cifras decimales teniendo cuidado de que cada una ocupe el lugar que le corresponde.

EJEMPLOS:

a) Escribir 56 milésimas: $\frac{56}{1000} = 0.056$

b) Escribir 987 millonésima: $\frac{987}{1000000} = 0.000987$

c) Escribir 5 diezmilésimas: $\frac{5}{10000} = 0.0005$

Regla para leer un número decimal:

- Para *leer un decimal,* se enuncia primero la parte entera si la hay y a continuación la parte decimal, dándole el nombre de las unidades inferiores.

EJEMPLOS:

a) 4.689 Se lee: cuatro enteros seiscientos ochenta y nueve milésimas

b) 0.00123 Se lee: cero enteros, ciento veintitrés cienmilésimas. También se puede leer, ciento veintitrés cienmilésimas.

c) 1.0100 Se lee: un entero cien diezmilésimas. También se puede leer, un entero, un centésimo, ya que los ceros a la derecha del punto decimal y última cifra significativa pueden ser omitidos.

NOTA: Para multiplicar ó dividir un número decimal por un factor, 10, 100, 1000, etc., basta con recorrer el punto decimal 1, 2, 3, etc., lugares a la derecha o a la izquierda respectivamente.

EJEMPLOS:

a) $(32.75)(1000) = 32750.0$

b) $(0.0036)(100) = 0.36$

c) $(1.23) \div (100) = 0.0123$

d) $(0.0428) \div (10) = 0.00428$

EJERCICIOS:

1) Escribir en notación decimal

a) 8 centésimas

b) 19 milésimas

c) 115 diezmilésimas

d) 9 cienmilésimas

2) Escribir en notación decimal equivalente.

a) 7 / 10

b) 35 / 100

c) 8 / 1000

d) 17 / 10000

3) Efectuar la operación indicada.

a) $(0.4)(10) =$	b) $(7.8)(10) =$	c) $(0.324)(10) =$	d) $(7.5)(100) =$	**SOL. 750**
e) $(0.103)(100) =$	f) $(0.188)(1000) =$	g) $(0.1)(10000) =$	h) $0.5 \div 10 =$	**SOL. 0.05**
i) $0.86 \div 10 =$	j) $3.43 \div 10 =$	k) $3.18 \div 100 =$	l) $16.134 \div 100 =$	**SOL. 0.16134**
m) $0.7625 \div 100 =$	n) $2.5 \div 1000 =$	o) $0.19 \div 10000 =$	p) $(0.5)(0.3) =$	**SOL. 0.15**
q) $(0.001)(0.0001) =$	r) $(5)(0.7) =$	s) $0.9 \div 0.3 =$	t) $0.81 \div 0.27 =$	**SOL. 3**
u) $0.64 \div 0.04 =$	v) $27 \div 0.03 =$	w) $125 \div 0.0005 =$	x) $12 \div 0.4 =$	**SOL. 30**

SIMPLIFICACION DE FRACCIONES

DEFINICION: ***Simplificar una fracción***, es convertirla en otra fracción equivalente, cuyos términos sean menores.

REGLA: Para *simplificar una fracción* a su mínima expresión, se dividen sus dos términos sucesivamente, entre los factores comunes que tengan. Se sugiere encontrar el m.c.d. de ambos términos de la fracción y dividirlos entre él.

EJEMPLO: $$\frac{1350}{2550} = \frac{2 \cdot 3^3 \cdot 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17} = \frac{\dfrac{2 \cdot 3^3 \cdot 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 5^2}}{\dfrac{2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17}{2 \cdot 3 \cdot 5^2}} = \frac{3^2}{17} = \frac{9}{17}$$

NOTA: Observar que 150, o sea, el producto de los factores $2 \cdot 3 \cdot 5^2$ es el **m.c.d.** de los dos términos de la fracción.

EJERCICIOS: Reducir a su más simple expresión las siguientes fracciones:

$$\frac{28}{36}, \quad \frac{54}{108}, \quad \frac{84}{126}, \quad \frac{162}{189}, \quad \frac{2004}{3006}$$

REDUCCION DE FRACCIONES AL MINIMO COMUN DENOMINADOR

DEFINICION: ***Reducir una fracción***, es cambiar la forma de la fracción sin cambiar su valor.

Regla para obtener el mínimo común denominador de dos o más fracciones:

- Se simplifican las fracciones dadas y se halla el m.c.m. de los denominadores que será el denominador común. Para hallar los numeradores se divide el m.c.m. entre cada denominador y el cociente se multiplica por el numerador respectivo.

EJEMPLO: Reducir al mínimo común denominador 2/3, 35/60, 5/180 :

Simplificando tenemos: $\frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{1}{36}$, donde el m.c.m. de 3, 12 y 36 es **36,** por lo que:

$$36 \div 3 = 12 \qquad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 12}{3 \cdot 12} = \frac{24}{36}$$

$$36 \div 12 = 3 \qquad \frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{21}{36}$$

$$36 \div 36 = 1 \qquad \frac{1}{36} = \frac{1 \cdot 1}{36 \cdot 1} = \frac{1}{36}$$

EJERCICIOS: Reducir al mínimo común denominador las fracciones siguientes:

a) 3/4, 5/7, 5/8, 11/14

b) 1/2, 2/9, 7/12, 11/24

c) 7/8, 3/4, 15/ 48, 1/64

d) 5/15, 4/24, 14/21

e) 3/12, 2/15, 5/36

OPERACIONES CON FRACCIONES

Regla para sumar o restar fracciones de igual denominador:

- Se suman o restan los numeradores y el resultado se divide por el denominador común. Se simplifica el resultado.

EJEMPLOS:

a) $$\frac{7}{9}+\frac{10}{9}+\frac{4}{9}=\frac{21}{9}=\boxed{\frac{7}{3}}$$

b) $$\frac{23}{25}-\frac{11}{25}-\frac{7}{25}=\frac{5}{25}=\boxed{\frac{1}{5}}$$

Regla para sumar o restar fracciones de distinto denominador:

- Se simplifican las fracciones dadas si es posible. Se reducen al mínimo común denominador y se procede como en el caso anterior.

EJEMPLOS:

$$\frac{12}{48}+\frac{21}{49}+\frac{23}{60}=\frac{1}{4}+\frac{3}{7}+\frac{23}{60}=\frac{105+180+161}{420}=\frac{446}{420}=\boxed{\frac{223}{210}}$$

$$\frac{3}{15}-\frac{1}{45}-\frac{1}{90}=\frac{1}{5}-\frac{1}{45}-\frac{1}{90}=\frac{18-2-1}{90}=\frac{15}{90}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

Regla para multiplicar fracciones:

- Para multiplicar dos o más fracciones, primero se simplifican las fracciones dadas entre si de ser posible y después se multiplican los numeradores resultantes entre si y este producto se divide por el producto de los denominadores.

EJEMPLO: $$\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{3}{6}=\frac{4\cdot 2\cdot 3}{9\cdot 8\cdot 6}=\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3}=\frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 1}{1\cdot 3\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=\boxed{\frac{1}{18}}$$

Regla para dividir fracciones:

- Para dividir dos fracciones se multiplica el dividendo por el inverso del divisor se simplifica el resultado.

EJEMPLO: $$\frac{21}{30}\div\frac{6}{7}=\frac{21}{30}\cdot\frac{7}{6}=\frac{3\cdot 7\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 2\cdot 3}=\frac{1\cdot 7\cdot 7}{2\cdot 1\cdot 5\cdot 2\cdot 3}=\boxed{\frac{49}{60}}$$

EJERCICIOS: Simplificar

a) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=$

b) $\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{1}{16}=$

c) $\frac{7}{5}+\frac{8}{15}+\frac{11}{60}=$ **SOL.** $\frac{127}{60}$

d) $\frac{7}{20}+\frac{3}{40}+\frac{1}{80}+\frac{3}{15}=$

e) $\frac{17}{20}-\frac{7}{20}=$

f) $\frac{3}{7}-\frac{2}{49}=$ **SOL.** $\frac{19}{49}$

g) $\frac{3}{2}-\frac{2}{21}-\frac{5}{11}=$

h) $\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{40}=$

i) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{12}=$ **SOL.** $\frac{17}{12}$

j) $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}+\frac{7}{12}=$

k) $\frac{11}{15}-\frac{7}{30}+\frac{3}{10}=$

l) $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=$ **SOL. 1**

m) $\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{22}{14}\cdot\frac{1}{4}=$

n) $\frac{7}{19}\cdot\frac{19}{13}\cdot\frac{26}{21}=$

ñ) $\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{9}=$ **SOL.** $\frac{2}{3}$

o) $\frac{3}{5}\div\frac{7}{10}=$

p) $\frac{30}{41}\div\frac{3}{87}=$

q) $\frac{5}{12}\div\frac{3}{4}=$ **SOL.** $\frac{5}{9}$

r) $\frac{3}{5}\cdot\frac{17}{19}\cdot\frac{5}{34}\cdot\frac{38}{75}=$

s) $\frac{3}{5}\div\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)=$

t) $\frac{5}{6}\div\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)=$ **SOL.** $\frac{25}{24}$

u) $\dfrac{4+\frac{3}{5}}{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}=$ **SOL:** $\frac{138}{25}$

v) $\dfrac{\left[\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{3}\right]-2}{\frac{2}{3}\left(\frac{5}{4}\div\frac{1}{2}\right)}=$ **SOL:** $\frac{1}{25}$

POTENCIACION

DEFINICION: Elevar un número entero "m" a una **potencia** n, es multiplicarlo tantas veces por sí mismo como unidades tiene n .

$$m^n = m\cdot m\cdot m\cdot m\cdot m\cdot \ldots\ (n\,veces)$$

Exponente

$$m^n = b$$

La operación se llama potenciación

Base **Potencia**

REGLA DE LOS SIGNOS

- Si la base es positiva, el resultado es positivo. $m^n = b$

EJEMPLO: $(3)^4 = 81$; $2^3 = 8$;

- Si la base es negativa y el exponente un número par, el resultado es positivo. $(-m)^n = +b$

EJEMPLO: $(-3)^4 = 81$

- Si la base es negativa y el exponente un número impar, el resultado es negativo. $(-m)^n = -b$

EJEMPLO: $(-5)^3 = -125$

NOTA 1: La potencia de exponente 1 de cualquier número, es el mismo número. $m^1 = m$

EJEMPLOS: $285^1 = 285$; $(-25)^1 = -25$; $0^1 = 0$

NOTA 2: La potencia de exponente cero de cualquier número diferente de cero, es 1. $m^0 = 1$, donde $m \neq 0$.

EJEMPLOS: $285^0 = 1$; $(-25)^0 = 1$

Justificación: $\dfrac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$ pero $\dfrac{a^n}{a^n} = 1 \Rightarrow a^0 = 1$

LEYES DE LOS EXPONENTES

Producto de potencias de igual base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

EJEMPLOS:

1) $(-3)^2(-3)(-3)^3 = (-3)^{2+1+3} = (-3)^6 = 729$

2) $(4)(4)^2(4)^0 = (4)^{1+2+0} = 4^3 = 64$

3) $m^3 \cdot m^0 \cdot m^1 = m^{3+0+1} = m^4$

Cociente de potencias de igual base:

$$i)\qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\quad \text{si}\quad m>n,\qquad \begin{cases} \dfrac{a^5}{a^3}=a^{5-3}=a^2 \\ \dfrac{7^9}{7^6}=7^{9-6}=7^3=343 \\ \dfrac{3^2}{3^{-2}}=3^{2-(-2)}=3^4=81 \end{cases}$$

$$ii)\qquad \frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}\quad \text{si}\ n>m,\qquad \begin{cases} \dfrac{a^3}{a^5}=\dfrac{1}{a^{5-3}}=\dfrac{1}{a^2} \\ \dfrac{5^2}{5^5}=\dfrac{1}{5^{5-2}}=\dfrac{1}{5^3}=\dfrac{1}{125} \end{cases}$$

Potencia de un producto: $(ab)^m=a^m\cdot b^m$

EJEMPLOS:

a) $(ab)^3=a^3\cdot b^3$

b) $(b\cdot c\cdot n)^x=b^x\cdot c^x\cdot n^x$

c) $[(-3)(2)(-1)]^2=(-3)^2(2)^2(-1)^2=9\cdot 4\cdot 1=36$

Potencia de una fracción: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m};\quad b\neq 0$

EJEMPLOS:

a) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r=\dfrac{a^r}{b^r}$

b) $\left(\dfrac{-8}{4}\right)^3=\dfrac{(-8)^3}{(4)^3}=\dfrac{-512}{64}=-8$

Potencia de otra potencia: $\left\{\left[(a)^n\right]^m\right\}^p=a^{n\cdot m\cdot p}$

EJEMPLOS:

a) $\left[\left(a^2\right)^3\right]^5=a^{30}$

b) $\left\{\left[(-2)^2\right]^1\right\}^3=(-2)^6=64$

EXPONENTES NEGATIVOS

DEFINICION: Si n es un entero positivo y $a \neq 0$, $\Rightarrow \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \Rightarrow \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

EJEMPLOS:

$a)\quad 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

$b)\quad a^{-3} = \frac{1}{a^3}$

$c)\quad x^{-9} = \frac{1}{x^9}$

RADICACION

DEFINICION: La **raíz** enésima de un número "a", es otro número "b", que elevado a la potencia "n" resulta "a".

Indice — Raíz

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \Rightarrow \quad b^n = a$$

La operación se llama radicación

Radical — Base o radicando (cantidad subradical)

EJEMPLO: $\sqrt[4]{16} = 2 \quad \Rightarrow \quad 2^4 = \boxed{16}$

REGLA DE LOS SIGNOS

- Cuando el radicando es negativo y el índice es un número impar, el resultado es negativo.

EJEMPLO: $\sqrt[3]{-343} = -7$

- Cuando el radicando es negativo y el índice es par, no tiene solución en el campo de los números reales.

EJEMPLO:

$\sqrt{-64} =$ no tiene solución :

$8^2 = 64 \;;\; (-8)^2 = 64$

➢ Cuando el radicando es positivo y el índice es un número par, hay dos resultados que tienen el mismo valor absoluto y distinto signo.

EJEMPLO: $\sqrt[4]{16} = \pm 2$:
$(2)^4 = 16$; $(-2)^4 = 16$

LEYES DE LOS RADICALES

➢ El ***producto de raíces con el mismo índice***, es igual a la raíz del producto de los subradicales.

$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}$ reciprocamente $\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$

EJEMPLOS:

$$\sqrt[4]{-3} \cdot \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{(-3) \cdot (27) \cdot (-1)} = \sqrt[4]{81} = \boxed{3}$$

$$\sqrt[3]{(-125) \cdot (512) \cdot (8)} = \sqrt[3]{-125} \cdot \sqrt[3]{512} \cdot \sqrt[3]{8} = 5 \cdot 8 \cdot 2 = \boxed{-80}$$

➢ El ***cociente de dos raíces con el mismo índice***, es igual a la raíz del cociente de los subradicales.

EJEMPLO: $$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

RECIPROCAMENTE:

$$\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{-8}} = \sqrt[3]{\frac{64}{-8}} = \sqrt[3]{-8} = \boxed{-2}$$

$$\sqrt{\frac{16}{4}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

➢ La ***raíz "n" de la raíz "m" de un número***, es igual a la raíz "$m \cdot n$" del número e igual a la raíz "m" de la raíz "n" del mismo número.

EJEMPLOS: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a} = \sqrt{\sqrt[3]{a}}$

NOTA: La raíz de cualquier índice del número uno, es igual al mismo número 1.

EJEMPLOS: $\sqrt[n]{1} = 1$ porque $1^n = 1$; $\sqrt[7]{1} = 1$ porque $1^7 = 1$.

EXPONENTES FRACCIONARIOS

- La raíz de cualquier grado de una potencia, se obtiene dividiendo el exponente de la potencia entre el índice de la raíz.

EJEMPLOS: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$

EJERCICIOS:

$a)\ (2\cdot 3\cdot 4)^2 =$ $b)\ (3\cdot 5\cdot 6)^3 =$ $c)\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$ **SOL.** $\mathbf{\frac{1}{4}}$

$d)\ \left(\frac{7}{5}\right)^2 =$ e) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 =$ $f)\ (2^2)4 =$ **SOL. 16**

$g)\ (3^3)^4 =$ $h)\ (1^3)^5 =$ $i)\ \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 =$ **SOL.** $\mathbf{\frac{1}{64}}$

$j)\ (2)^{-2} =$ $k)\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} =$ $m)\ (-3)^2 =$ **SOL. 9**

$n)\ \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} =$ $ñ)\ \left(\frac{1}{-27}\right)^{\frac{1}{3}} =$ $o)\ \left(\frac{1}{-27}\right)^{-\frac{1}{3}} =$ **SOL. –3**

$p)\ \sqrt[3]{\frac{8}{-125}} =$ $q)\ \sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{2} =$ $r)\ \sqrt[3]{216} =$ **SOL. 6**

$s)\ \left\{\left[(3)^2\right]^3\right\}^2 =$ $t)\ \frac{x^5y^7}{x^3y^4} =$ $u)\ \frac{x^3y^4}{x^{-2}y^{-3}} =$ **SOL.** x^5y^7

$v)\ \sqrt[3]{\sqrt{729}} =$ $w)\ \sqrt{4\cdot 25\cdot 36} =$ $x)\ \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 =$ **SOL. 3**

OPERACIONES CON RADICALES

DEFINICION: Un ***radical esta reducido a su más simple expresión***, cuando descomponiendo en sus factores primos la cantidad subradical, se observa que todos los factores primos están elevados a exponentes menores que el índice del radical.

EJEMPLO:

$\sqrt{30}$ esta reducido a su mas simple expresión porque $\sqrt{30} = \sqrt{2\cdot 3\cdot 5}$

$\sqrt{24}$ no esta reducido porque $\sqrt{24} = \sqrt{2^3\cdot 3}$

Regla: Para ***reducir un radical a su más simple expresión***, se descompone la cantidad subradical en factores primos y se hacen con ellos los arreglos que se indican a continuación, de acuerdo a la ley del producto de raíces con el mismo índice.

EJEMPLO: Simplificar $\sqrt{18}$

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{720} = 3\sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot 2^2 \cdot 3\sqrt{5} = 36\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$$

EJERCICIOS: Simplificar

a) $\sqrt{180} =$	b) $\frac{1}{2}\sqrt{8} =$	c) $\sqrt{300} =$	d) $\frac{3}{8}\sqrt{80} =$
e) $2\sqrt{108} =$	f) $\frac{2}{3}\sqrt{18} =$	g) $\sqrt{243} =$	h) $7\sqrt{432} =$
i) $\sqrt[3]{432} =$	j) $2\sqrt[3]{2187} =$	k) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{375} =$	l) $\sqrt[3]{81} =$
m) $\sqrt[3]{250} =$	n) $5\sqrt[3]{3000} =$	o) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16} =$	p) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{54} =$

Regla para suma y resta de radicales:

- Simplifíquese los radicales dados si es posible y efectúese las operaciones, tomando en consideración que para poder sumar o restar radicales, estos deben ser semejantes, es decir, deben tener el mismo índice y el mismo radicando.

EJEMPLOS: Simplificar:

$$\sqrt{45} + \sqrt{80} = 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$$

$$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{80} = \sqrt{2^4 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$$

EJERCICIOS: Simplificar:

a) $2\sqrt{75} + \sqrt{28} - \sqrt{12} =$ b) $\frac{2}{3}\sqrt{18} + \frac{3}{5}\sqrt{50} - \frac{1}{3}\sqrt{45} =$

c) $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} =$ d) $3\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{45} =$

e) $6\sqrt{5}+8\sqrt{5}+\sqrt{5}=$ f) $4\sqrt{300}+\sqrt{192}+\sqrt{243}=$

g) $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}=$ h) $3\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{625}=$

i) $5\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{192}=$ j) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{54}-\frac{2}{5}\sqrt[3]{250}=$

MULTIPLICACION DE RADICALES

Regla para multiplicar radicales del mismo índice:

- Para multiplicar radicales del mismo índice, se multiplican los coeficientes entre si y las cantidades subradicales entre si, y el producto de las cantidades subradicales se coloca bajo el signo del radical común y se simplifica.

EJEMPLO: Multiplicar y simplificar:

$$\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{6\cdot 10}=\sqrt{2^2\cdot 3\cdot 5}=2\sqrt{15}$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{15}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{30}\cdot\frac{5}{6}\sqrt{8}=\frac{2\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 4\cdot 6}\sqrt{3\cdot 5\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 2^3}=\frac{5}{12}\sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2}=\frac{5}{12}\cdot 2^2\cdot 3\cdot 5=25$$

EJERCICIOS: Efectuar:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}=$ b) $2\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{20}=$ c) $\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{20}=$

d) $3\sqrt{10}\cdot 7\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}=$ e) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{2}=$ f) $\frac{5}{6}\sqrt[3]{4}\cdot\frac{1}{5}\sqrt[3]{16}\cdot 6\sqrt[3]{12}=$

DIVISION DE RADICALES

Regla para dividir radicales del mismo índice:

- Para dividir radicales del mismo índice, se dividen los coeficientes entre si, las cantidades subradicales entre si, y el cociente de las cantidades subradicales se coloca bajo el signo de radical común y se simplifica.

EJEMPLO: Simplificar:

$$\sqrt{150}\div\sqrt{2}=\sqrt{\frac{150}{2}}=\sqrt{5^2\cdot 3}=5\sqrt{3}$$

EJERCICIOS: Simplificar:

a) $\sqrt{8} \div \sqrt{2} =$ b) $4\sqrt{75} \div 2\sqrt{3} =$ c) $5\sqrt{120} \div 6\sqrt{40} =$

d) $\sqrt[3]{48} \div \sqrt[3]{3} =$ e) $3\sqrt[3]{108} \div 4\sqrt[3]{4} =$ f) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16} \div 2\sqrt[3]{2} =$

INTRODUCCION DE COEFICIENTES BAJO EL SIGNO RADICAL

Regla para introducir el coeficiente de un radical bajo el signo del radical:

- Para introducir el coeficiente de un radical bajo el signo del radical se eleva dicho coeficiente a la potencia que indique el índice del radical. Cuando un radical tiene como coeficiente 1, se dice que el radical es entero.

EJEMPLOS:

1. Introducir el coeficiente de $2\sqrt{3}$ bajo el signo radical.

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

2. Hacer entero el radical $3\sqrt[3]{2}$

$$3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$$

REDUCCION DE RADICALES AL MINIMO COMUN INDICE

Regla para reducir radicales al mínimo común índice:

- Se halla el m.c.m. de los índices, que será el índice común y se eleva cada cantidad subradical a la potencia que resulta de dividir el índice común entre el índice de subradical.

EJEMPLO: Reducir al mínimo común índice: $\sqrt{3},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[4]{2}$

El m.c.m. de los índices es 12, que es el índice común. Entonces tenemos:

$$\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$$
$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}$$
$$\sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{8}$$

NOTA: Se pueden multiplicar o dividir también radicales de diferente índice, pero en tal caso se deberá reducir los radicales al mínimo común índice y multiplicarse ó dividirse como radicales del mismo índice.

RACIONALIZAR EL DENOMINADOR DE UNA FRACCION CUANDO EL DENOMINADOR ES INDICE 2 Y 3

Regla: Se multiplican los términos de la fracción por el radical que multiplicado por el denominador lo convierta en cuadrado ó cubo perfecto respectivamente y se simplifica el resultado.

EJEMPLOS: Racionalizar el denominador de :

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

b) $\frac{5}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$

c) $\frac{2}{\sqrt{18}}=\frac{2}{\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\frac{2\sqrt[3]{4}}{2}=\sqrt[3]{4}$

e) $\frac{3}{\sqrt[3]{12}}=\frac{3\sqrt[3]{3^2\cdot 2}}{\sqrt[3]{3\cdot 2^2}\cdot\sqrt[3]{3^2\cdot 2}}=\frac{3\sqrt[3]{18}}{6}=\frac{\sqrt[3]{18}}{2}$

EJERCICIOS: Racionalizar:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}=$ b) $\frac{1}{2\sqrt{2}}=$ c) $\frac{2}{\sqrt{5}}=$ d) $\frac{1}{3\sqrt{5}}=$

e) $\frac{2}{3\sqrt[3]{3}}=$ f) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=$ g) $\frac{5}{3\sqrt[3]{2}}=$ h) $\frac{4}{\sqrt[3]{16}}=$

UNIDAD III

ALGEBRA

III.1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

DEFINICION: ***Expresiones algebraicas***, son las expresiones que combinan operaciones entre números, variables, ó productos de números y variables.

EJEMPLOS: $5x,\quad \sqrt{5a^2},\quad (a+b)c,\quad y^2+\frac{2}{5}-\sqrt{(c-d)^3}$

DEFINICION: ***Término***, es una expresión algebraica que consta de un solo símbolo o de más símbolos no separados entre si por el signo $+$ ó $-$.

EJEMPLOS: $2x^2y,\quad -8a^2b^3c,\quad \frac{3xy}{2a},$

DEFINICION: ***Monomio***, es una expresión algebraica con un solo término.

EJEMPLOS: $3m^2n^3,\quad -2xy,\quad \frac{2}{3}x^3y^2$

PARTES DE UN TERMINO (monomio).

$$\begin{cases} -\,SIGNO \\ -\,COEFICIENTE \\ -\,PARTE\ LITERAL \\ -\,GRADO \end{cases}$$

coeficiente, exponentes

$$\underbrace{-}_{\text{signo}}\overset{\text{coeficiente}}{3}\,\underbrace{a^{2}x^{3}}_{\text{parte literal}}$$

signo, parte literal

GRADO: 5

DEFINICION: ***Grado de un monomio***, es la suma de los exponentes de cada una de las variables.

EJEMPLO: $5a^2x^3y$ es de grado 6, $2+3+1=6$

POLINOMIOS

DEFINICION: ***Polinomio***, es una expresión algebraica que comprende únicamente potencias enteras no negativas (0, 1, 2, 3, ...) en una o más variables y que no contenga variable alguna en el denominador.

EJEMPLOS:

Son polinomios de una variable:

$2x$ porque x tiene como exponente 1

5 porque se puede expresar como $5x^0$ y $x^0 = 1$

0 porque se puede expresar como $0x^0$

$5x^2 - 8x + 2$

Son polinomios en varias variables:

$6x^2 + 7y^3$

$8xy - 7x + y - 3$

No son polinomios:	***Porque la variable***
$6x + 7x^{-1} + 8$	Tiene exponente negativo
$9x + \sqrt{y}$	Tiene un radical
$8x + y^{\frac{1}{2}}$	Tiene exponente fraccionar io
$\frac{10xy}{z}$	La variable esta en el denominado r

CLASES DE POLINOMIOS

- Un término: **Monomio**
- Dos términos: **Binomio**
- Tres términos: **Trinomio**
- Cuatro términos: **Tetranomio**
- Etc.

DEFINICION: ***Grado de un polinomio***, es el término de mayor grado que contenga. Se pueden considerar los siguientes casos:

1) Con respecto a una sola variable : $2a^2x^4 - \frac{3}{2}a^3x^3 + 6a^2$ es de cuarto grado con respecto a "x"

es de tercer grado con respecto a "a"

2) con respecto a varias variables : $2a^2x^4 - \frac{3}{2}a^3x^3 + 6a^2$ es de sexto grado.

TERMINOS SEMEJANTES

DEFINICION: ***Dos ó más términos son semejantes***, cuando tienen la misma parte literal, o sea, cuando tienen iguales literales, afectadas de iguales exponentes.

EJEMPLOS:

$2a,\ a;\qquad -3b,\ 8b;\qquad -3a^2b^2,\ 9a^2b^2;\qquad x^3,\ 5x^3;$ etc.

REDUCCION DE TERMINOS SEMEJANTES

DEFINICION: ***Reducción de términos semejantes***, es una operación que tiene por objeto, convertir en un sólo término, dos o más términos semejantes.

Existen 3 casos:

- **Reducción de dos o mas términos semejantes del mismo signo.**

EJEMPLOS:

$$5x + x + 2x = 8x$$
$$-3a - 2a - 5a = -10a$$

- **Reducción de dos términos semejantes de distinto signo.**

EJEMPLOS:

$$2a - 3a = -a \qquad\qquad 18x - 11x = 7x$$
$$-2a + 3a = a \qquad\qquad -18x + 11x = -7x$$

- **Reducción de mas de dos términos semejantes de signos diferentes.**

EJEMPLOS:

$$5a - 8a + a - 6a + 21a = (5a + a + 21a) - (8a + 6a) = 27a - 14a = \boxed{13a}$$

III.2. OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS FUNDAMENTALES

Regla para sumar polinomios:

- Para sumar polinomios, se suman los términos semejantes. Si el polinomio que se coloca en primer lugar no esta ordenado, primero se procede a ordenarlo en sentido decreciente con respecto a alguna de sus variables y luego se colocan los términos del segundo polinomio debajo de los respectivos términos semejantes. Por último, se procede a realizar la suma, recordando que sólo se suman los coeficientes.

EJEMPLO: Sumar $(10x^3+5x^2-3x-11)+(8+3x-x^2+2x^3)$

$$\begin{array}{r} 10x^3+5x^2-3x-11 \\ 2x^3-x^2+3x+8 \\ \hline 12x^3+4x^2 \qquad -3 \end{array}$$

También se puede resolver de la siguiente forma:

$$(10x^3+5x^2-3x-11)+(8+3x-x^2+2x^3)=10x^3+5x^2-3x-11+8+3x-x^2+2x^3$$

$$10x^3+2x^3+5x^2-x^2-3x+3x-11+8=\boxed{12x^3+4x^2-3}$$

Regla para restar polinomios:

- Hay que restar del minuendo cada uno de los términos del sustraendo, así que a continuación del minuendo se escribe el sustraendo cambiando los signos a todos sus términos.

EJEMPLO: De $4x-3y+z$ Restar $2x+5z-6$

$$\begin{array}{lr} \text{Minuendo:} & 4x-3y+z \\ \text{Sustraendo:} & -2x \qquad -5z+6 \\ \hline \text{Resta :} & 2x-3y-4z+6 \end{array}$$

EJERCICIOS:

Hallar la suma de:

a) $3x^2-4xy+y^2$; $-5xy+6x^2-3y^2$; $-6y^2-8xy-9x^2$ **SOL:** $-17xy-8y^2$

b) $-8a^2m+6am^2-m^3$; $a^3-5am^2+m^3$; $-4a^3+4a^2m-3am^2$; $7a^2m-4am^2-6$

c) $3x + x^3; \ -4x^2 + 5; \ -x^3 + 4x^2 - 6$ **SOL:** $\mathbf{3x-1}$

d) $a^3 - b^3, \quad 5a^2b - 4ab^2, \quad a^3 - 7ab^2 - b^3$

e) $\frac{1}{3}x^3 + 2y^3 - \frac{2}{5}x^2y + 3, \quad -\frac{1}{10}x^2y + \frac{3}{4}xy^2 - \frac{3}{7}y^3, \quad -\frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{8}xy^2 - 5$

f) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}xy, \quad \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2$ **SOL:** $\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}xy + \frac{1}{4}y^2$

g) $a^2 + \frac{1}{2}ab, \quad -\frac{1}{4}ab + \frac{1}{2}b^2, \quad -\frac{1}{4}ab - \frac{1}{5}b^2$

1. Restar:

a) $(5m^3 - 9n^3 + 6m^2n - 8mn^2) - (14mn^2 - 21m^2n + 5m^3 - 18)$ **SOL:** $\mathbf{27m^2n - 22mn^2 - 9n^3 + 18}$

b) $(x^3 - 9x + 6x^2 - 19) - (-11x^2 + 21x - 43 + 6x^3)$

c) $(x^3 - x^2 + 6) - (5x^2 - 4x + 6)$ **SOL:** $\mathbf{x^3 - 6x^2 + 4x}$

d) $(-a^5b + 6a^3b^3 - 18ab^5 + 42) - (-8a^6 + 9b^6 - 11a^4b^2 - 11a^2b^4)$

e) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b\right) - \left(\frac{4}{5}a + \frac{2}{9}b - \frac{1}{2}\right)$ **SOL:** $-\frac{3}{10}a - \frac{8}{9}b + \frac{1}{2}$

f) $\left(\frac{5}{6}m^3 + \frac{2}{9}n^3\right) - \left(-\frac{1}{2}m^2n + \frac{3}{8}mn^2 - \frac{1}{5}n^3\right)$

g) $\left(a^3 + a^2 - a + \frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{7}{8}a^2 + \frac{9}{10}a + \frac{7}{8}\right)$ **SOL:** $a^3 + \frac{15}{8}a^2 - \frac{19}{10}a - \frac{1}{24}$

h) $\left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{5}b - \frac{7}{8}c + \frac{8}{9}d\right) - \left(-\frac{7}{20}b + \frac{1}{8}c - \frac{1}{9}d + \frac{7}{8}\right)$

<u>MULTIPLICACION</u>

MULTIPLICACION (monomio por monomio).

SECUENCIA OPERATIVA PARA LA MULTIPLICACION DE MONOMIOS.

- LEY DE LOS SIGNOS
- COEFICIENTES: (Regla de multiplicación de los reales)
- LITERALES: Multiplicamos literales iguales (misma base), de acuerdo con las leyes de los exponentes.

EJEMPLO: $\left(-3x^2y\right)\left(12x^3y^2\right)=\boxed{-36x^5y^3}$

MULTIPLICACION (monomio por polinomio).

Regla para multiplicar un monomio por un polinomio:

- Se aplica la ley distributiva, con la secuencia operativa de la multiplicación de monomio por monomio.

EJEMPLO: $5x^2y\left(2xy-7x^3y^4\right)=\boxed{10x^3y^2-35x^5y^5}$

MULTIPLICACION (Polinomio por Polinomio).

Regla para multiplicar un polinomio por un polinomio:

- Se aplica sucesivamente la ley distributiva, con la secuencia operativa de la multiplicación de monomio por monomio y se reducen términos semejantes.

EJEMPLO:

$$(3x+4)\left(2x^2+5x+6\right)=\left(6x^3+15x^2+18x\right)+\left(8x^2+20x+24\right)=\boxed{6x^3+23x^2+38x+24}$$

EJERCICIOS: Encuentra el producto indicado.

1) $\left(5x^3\right)\left(4x^5\right)=$

2) $\left(3ab^4\right)\left(-2a^3b^2\right)=$

3) $(-7)\left(-x^2y\right)\left(-x^6y^5\right)=$

4) $\left(-4r^2s^2\right)\left(3r^2s^3\right)=$

5) $2xy^2\left(3x^2-6yz-xy-1\right)=$

6) $\frac{1}{2}a^3b^2\left(2a^2+5ab-b^2\right)=$

7) $(3x+5y)\left(3x^2-xy+4y^2\right)=$

8) $(2x-5y)\left(4x^2-xy-3y^2\right)=$

9) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)=$

10) $\left(x-\frac{2}{5}y\right)\left(\frac{5}{6}y+\frac{1}{3}x\right)=$

DIVISION

DIVISION (de monomios).

Regla para dividir un monomio entre otro monomio:

- Se procede según la secuencia operativa de: signo, coeficientes y literales.

EJEMPLO:

$$\frac{-2x^3y^4z^7}{8x^4y^2z^7}=\left(\frac{-2}{8}\right)\left(\frac{x^3}{x^4}\right)\left(\frac{y^4}{y^2}\right)\left(\frac{z^7}{z^7}\right)=\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\left(y^2\right)(1)=\boxed{-\frac{y^2}{4x}}$$

DIVISION (polinomio entre monomio).

Regla para dividir un polinomio entre un monomio:

- Para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada término del polinomio por el monomio y se continua la secuencia operativa.

EJEMPLO: $\frac{10x^5-12x^4+6x^3}{2x^2}=\frac{10x^5}{2x^2}+\frac{-12x^4}{2x^2}+\frac{6x^3}{2x^2}=\boxed{5x^3-6x^2+3x}$

DIVISION (polinomio entre polinomio).

Regla para dividir un polinomio entre otro polinomio:

➢ El procedimiento es muy semejante al de la división aritmética. el método consiste en:

◊ Ordenar el dividendo y el divisor de con respecto a una literal en forma descendente, insertando coeficiente cero o dejando un espacio en los términos que no estén presentes.

◊ Dividir el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, para obtener el primer término del cociente.

◊ Multiplicar el cociente por cada término del divisor, y el resultado colocarlo debajo del correspondiente término semejante del dividendo.

◊ Sustraer dichos productos del dividendo (recuerda que sustraer es cambiar al inverso aditivo). la diferencia es un nuevo dividendo.

◊ Repetir todo el proceso anterior con el nuevo dividendo, hasta que obtengas un residuo que sea cero o de menor grado en la literal común que el grado del divisor.

EJEMPLO: Efectuar la división $\frac{6x^4-41x^2+3x+6}{2x^2-4x-3}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2+6x-4 \\
\hline
2x^2-4x-3 & 6x^4+\qquad -41x^2+3x+6 \\
 & -6x^4+12x^3+9x^2 \\
\hline
 & 12x^3-32x^2+3x \\
 & -12x^3+24x^2+18x \\
\hline
 & -8x^2+21x+6 \\
 & 8x^2-16x-12 \\
\hline
 & 5x-6
\end{array}
$$

Por lo tanto,

$$\frac{6x^4-41x^2+3x+6}{2x^2-4x-3}=\boxed{3x^2+6x-4+\frac{5x-6}{2x^2-4x-3}}$$

EJERCICIOS:

1) $4a^3b^2 \div -2ab =$

2) $-5a^4b^3c \div -a^2b$

3) $-20mnx^2y^3 \div 4xy^3 =$

4) $\frac{1}{2}x^2 \div \frac{2}{3} =$

5) $\left(3a^3-6a^2b+9ab^2\right)\div 3a =$

6) $\frac{3x^2y^3-5a^2x^4}{-3x^2} =$

7) $\frac{6a^8b^8-3a^6b^6-a^2b^3}{3a^2b^3} =$

8) $\left(\frac{1}{4}m^4-\frac{2}{3}m^3n+\frac{3}{8}m^2n^2\right)\div\frac{1}{4}m^2$

9) $\left(3x^2+2x-8\right)\div(x+2)=$

10) $\frac{2x^3-2-4x}{2+2x} =$

11) $\left(28x^2-30y^2-11xy\right)\div(4x-5y)=$

12) $\frac{11a^3-3a^5-46a^2+32}{8-3a^2-6a} =$

DIVISION SINTETICA

TEOREMA DEL RESIDUO

- El residuo de dividir un polinomio entero racional en x por un binomio de la forma $x-a$ se obtiene sustituyendo en el polinomio dado la x por a.

EJEMPLO: Hallar sin efectuar la división, el residuo de dividir x^2-7x+6 entre $x-4$

Sustituyendo la x por 4, tenemos: $4^2-7(4)+6=16-28+6=\boxed{-6}$ **es el residuo**

En forma general

- El residuo de dividir un polinomio ordenado en x por un binomio de la forma $bx - a$ se obtiene sustituyendo en el polinomio dado la x por el quebrado que resulta de dividir el segundo término del binomio con el signo cambiado entre el coeficiente del primer término del binomio.

EJEMPLO: Hallar sin efectuar la división, el residuo de dividir $\mathbf{2x^3 + 6x^2 - 12x + 1}$ entre $\mathbf{2x + 1}$

Sustituyendo la x por $-\frac{1}{2}$, tenemos:

$$2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 12\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{4} + \frac{6}{4} + \frac{24}{4} + \frac{4}{4} = \boxed{\frac{33}{4}}$$ **es el residuo**

EJERCICIOS: Hallar sin efectuar la división, el residuo de dividir:

1. $x^2 - 2x + 3$ entre $x - 1$
2. $x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ entre $x + 1$
3. $6x^3 + x^2 + 3x + 5$ entre $2x + 1$
4. $12x^3 - 21x + 90$ entre $3x - 3$
5. $a^6 + a^4 - 8a^2 + 4a + 1$ entre $2a + 3$

SOLUCION :	
1.	2
2.	-8
3.	3
4.	81
5.	$-\frac{419}{64}$

Regla para hallar el cociente y el residuo de la división de un polinomio entero en x por $x - a$ Llamada DIVISION SINTETICA.

1. El cociente es un polinomio en x, cuyo grado es 1 menos que el grado del dividendo.

2. El coeficiente del primer término del cociente, es igual al coeficiente del primer término del dividendo.

3. El coeficiente de un término cualquiera del cociente, se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por el segundo término del binomio divisor cambiando de signo y sumando este producto con el coeficiente del término que ocupa el mismo lugar en el dividendo.

4. El residuo se obtiene multiplicando el coeficiente del último término del cociente por el segundo término del divisor cambiado de signo y sumado este producto con el término independiente del dividendo.

EJEMPLO: Hallar por división sintética, el cociente y el residuo de dividir:

$\mathbf{x^3 - 5x^2 + 3x + 14}$ entre $\mathbf{x - 3}$

Aplicando la regla anterior para lo cual se escriben solamente los coeficientes del dividendo, tenemos:

Dividendo...	x^3	$-5x^2$	$+3x$	$+14$	Divisor... $x-3$
Coeficientes...	1	-5	$+3$	$+14$	$+3$ (segundo término del divisor con el signo cambiado).
	$1\times 3=$	3	$(-2)\times 3=-6$	$(-3)\times 3=-9$	
	1	-2	-3	$+5$	

Por lo tanto **el cociente** de la división **es:** $\boxed{x^2-2x-3}$ y **el residuo es** : $\boxed{5}$

EJEMPLO: Hallar por división sintética, el cociente y el residuo de dividir:

$2x^4-3x^3-7x-6$ entre **$2x+1$**

Aplicando la regla anterior para lo cual se escriben solamente los coeficientes del dividendo, tenemos :

Si el polinomio es incompleto, se colocan ceros como coeficiente de los términos

Dividendo...	$2x^4$	$-3x^3$		$-7x$	-6	Divisor... $2x+1$
Coeficientes...	2	-3	0	-7	-6	$-\frac{1}{2}$ (Segundo término del divisor con el signo cambiado, considerando el divisor de la forma $x-a$, para lo cual se dividen los dos términos por 2).
		-1	2	-1	4	
	2	-4	2	-8	-2	

NOTA : Como el divisor lo hemos dividido entre 2, el cociente queda multiplicado por 2 ; por lo cual, los coeficientes que encontramos para el cociente tenemos que dividirlos entre 2.

Por lo tanto **el cociente** de la división **es:** $\boxed{x^3-2x^2+x-4}$ y **el residuo es:** $\boxed{-2}$

EJERCICIOS: Hallar, por división sintética, el cociente y el residuo de dividir:

1. x^2-7x+5 entre $x-3$
2. a^2-5a+1 entre $a+2$
3. $2x^4-5x^3+6x^2-4x-105$ entre $x+2$
4. $x^5-16x^3-202x+81$ entre $x-4$
5. $3a^3-4a^2+5a+6$ entre $3a+2$

SOLUCION :	
1. Coc. $x-4$;	res. -7
2. Coc. $a-7$;	res. 15
3. Coc. $2x^3-9x^2+24x-52$	res. -1
4. Coc. x^4+4x^3-202 ;	res. -727
5. Coc. a^2-2a+3 ;	res. 0

DIVISIVILIDAD POR $x - a$

Un polinomio entero en x que se anula para $x = a$, o sea, sustituyendo en él la x por a, es divisible por $x - a$.

NOTA : Si $P(x)$ es divisible por $x - a$ tiene que anularse para $x = a$, es decir, sustituyendo la x por la a ; si $P(x)$ es divisible por $x + a$ tiene que anularse para $x = -a$; si $P(x)$ es divisible por $bx - a$ tiene que anularse para $x = \frac{a}{b}$ y si es divisible por $bx + a$ tiene que anularse para $x = -\frac{a}{b}$

EJEMPLO: Hallar, sin efectuar la división, si $\mathbf{x^3 - 4x^2 + 7x - 6}$ es divisible por $\mathbf{x - 2}$.

Sustituyendo la x por 2, tenemos: $2^3 - 4(2)^2 + 7(2) - 6 = 8 - 16 + 14 - 6 = \boxed{0}$

Por lo tanto $\mathbf{x^3 - 4x^2 + 7x - 6}$ es divisible por $\mathbf{x - 2}$

EJEMPLO: Hallar por inspección, si $\mathbf{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 6}$ es divisible por $\mathbf{x + 3}$ y encontrar el cociente de la división.

Aplicando la **división sintética**, tenemos :

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -2 & 1 & -6 & -3 \\ & -3 & 3 & -3 & 6 & \\ \hline 1 & -1 & 1 & -2 & \mathbf{0} & \end{array} \quad \textbf{(residuo)}$$

Al realizar la división sintética, observamos que **el polinomio se anula** al sustituir la x por -3 ; por lo que es divisible exactamente entre $x + 3$.

El cociente es $x^3 - x^2 + x - 2$

y podemos escribir :

$\mathbf{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 6 = (x + 3)(x^3 - x^2 + x - 2)}$.

NOTA: Es ***condición necesaria*** para que un polinomio en x sea divisible por un binomio de la forma $x - a$, que el término independiente del polinomio sea múltiplo del término a del binomio, sin tener en cuenta los signos, pero esta condición ***no es suficiente***, es decir, que aun cuando el término independiente del polinomio sea divisible por el término a del binomio, no podemos afirmar que el polinomio en x sea divisible por el binomio $x - a$.

EJERCICIOS: Utilizando la división sintética, determinar si las siguientes divisiones son exactas o no y encontrar el cociente y el residuo si lo hay en cada caso.

1. $2a^3 - 2a^2 - 4a + 16$ entre $a + 2$
2. $a^4 - a^2 + 2a + 2$ entre $a + 1$
3. $x^4 + 5x - 6$ entre $x - 1$
4. $x^3 - 2x^2 + 3$ entre $x + 1$
5. $a^3 - 2a^2 + 2a + 5$ entre $a + 1$

SOLUCION :

1. Exacta ; cociente $2a^2 - 6a + 8$
2. Exacta ; cociente $a^3 - a^2 + 2$
3. Exacta ; cociente $x^3 + x^2 + x + 6$
4. Exacta; cociente $x^2 - 3x + 3$
5. Exacta ; cociente $a^2 - 3a + 5$

III.3. PRODUCTOS NOTABLES

DEFINICION: Se llaman ***productos notables***, a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyos resultados pueden ser encontrados por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación.

BINOMIO ELEVADO AL CUADRADO

- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = \quad a^2 + 2ab + b^2$ Trinomio cuadrado perfecto
- $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = \quad a^2 - 2ab + b^2$ Trinomio cuadrado perfecto

BINOMIO ELEVADO AL CUBO

- $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = \quad a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ Tetranomio cubo perfecto
- $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = \quad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ Tetranomio cubo perfecto

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CONJUGADOS

- $(a+b)(a-b) = \quad a^2 - b^2$ Diferencia de cuadrados

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS QUE TIENEN UN TERMINO COMUN

- $(x+a)(x+b) = \quad x^2 + (a+b)x + ab$ Trinomio de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c$

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CON UN TERMINO SEMEJANTE Y EL OTRO NO COMUN

- $(ax+b)(cx+d) = \quad acx^2 + (ad+bc)x + bd$ Trinomio de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c$

PRODUCTO DE UN BINOMIO POR UN TRINOMIO

- $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = \quad a^3 + b^3$ Suma de cubos
- $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = \quad a^3 - b^3$ Diferencia de cubos

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS QUE NO TIENEN TERMINO COMUN

- $(a+b)(c+d) = \quad ac + ad + bc + bd$ Tetranomio

EJERCICIOS: Encontrar por simple inspección, el resultado de.

a) $(3x+2)^2 =$

b) $(5ax+2b)(5ax-2b) =$

c) $(x+5)(x+4) =$

d) $(2x+3)(3x-6) =$

e) $(2x+y)^3 =$

f) $(x+1)(x^2-x+1) =$

g) $(x-2)(x^2+2x+4) =$

h) $(2x+a)(3y-b) =$

i) $(y+z+3)(y-z-3) =$

j) $(m+3)^2 =$

k) $(x+y)(x-y) =$

l) $(n-4)^3 =$

m) $(2x+3y)^2 =$

n) $(2m+9)(2m-9) =$

o) $(1-3y)^3 =$

p) $(3a^3+8b^4)^2 =$

q) $(x^2+a^2)(x^2-a^2) =$

r) $(a^2-2b)^3 =$

s) $(8x^2y+9m^3)^2 =$

t) $(a^3-b^2)(a^3+b^2) =$

u) $(x-7)(x-6) =$

v) $(a-3)^2 =$

w) $(y^2-3y)(y^2+3y) =$

x) $(a-11)(a+9) =$

y) $(2a-3b)^2 =$

z) $(a+2)^3 =$

1) $(x+7)(x-2) =$

2) $(3a^4-5b^2)^2 =$

3) $(2x+1)^3 =$

4) $(x+2)(x+3) =$

5) $(10x^3-9xy^5)^2 =$

6) $(4n+3)^3 =$

7) $(x^2+7)(x^2+3) =$

8) $(x^3-12)(x^3-3) =$

9) $(3x+5)(4x+6) =$

10) $(x^2y^3-8)(x^2y^3+6) =$

11) $(a-3)(a^2+3a+9) =$

12) $(3a+b^2)(9a^2-3ab^2+b^4) =$

13) $(2x-3)(3x+1) =$

14) $(4x+3)(5x-2) =$

15) $(a-1)(18a+5) =$

16) $(x-1)(x^2+x+1) =$

17 $(5x+2)(25x^2-10x+4) =$

18) $(2xy-4)(3xy+2) =$

20) $(x^n+3)^2 =$

21) $(x^{a+1}-y^b)^2 =$

22) $(a^b+c^d)(a^b-c^d) =$

SUGERENCIA: Para encontrar el producto, primero aplica la regla correspondiente dejando indicadas las operaciones y después efectúalas.

III. 4. FACTORIZACION

DEFINICION: La ***factorización***, consiste en que dada una expresión algebraica que es el producto de ciertos factores, pueden determinarse estos. Al resolver ejercicios de factorización, se deben tratar según los casos que se presentan enseguida, la mayor parte de los cuales se fundamentan en los productos notables.

POLINOMIOS :

Caso 1: **monomio factor común**

$$ax + ay - az = a(x + y - z)$$

Caso 2: **por agrupación**

$$ax + bx - ay - by = x(a + b) - y(a + b) = (a + b)(x - y)$$

BINOMIOS :

Caso 3: **diferencia de cuadrados**

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Caso 4: **suma de cubos**

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Caso 5: **diferencia de cubos**

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

TRINOMIOS :

Caso 6: **trinomio cuadrado perfecto**

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Caso 7: **trinomio cuadrado de la forma $x^2 + bx + c$**

$$x^2 + bx + c = (x + a)(x + d)$$

$$a + d = b$$
$$a \cdot d = c$$

Caso 8: **trinomio cuadrado de la forma $ax^2 + bx + c$**

$$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$$

TETRANOMIO :

Caso 9: **tetranomio cubo perfecto**

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$$

EJEMPLOS: Factorizar indicando el caso correspondiente.

1) $2ax^3 - 6a^2x^2 + 10a^2x = 2ax\left(x^2 - 3ax + 5a\right)$ caso: 1

2) $3xy - 5x + 6ay - 10a = x(3y-5) + 2a(3y-5) = (x+2a)(3y-5)$ caso: 2

3) $9a^2x^4 - 16b^2y^2 = \left(3ax^2 + 4by\right)\left(3ax^2 - 4by\right)$ caso: 3

4) $8a^3 + 64 = (2a+4)\left(4a^2 - 8a + 16\right)$ caso: 4

5) $x^3 - 27 = (x-3)\left(x^2 + 3x + 9\right)$ caso: 5

6) $4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2$ caso: 6

$x^2 - 6ax + 9a^2 = (x-3a)^2$

7) $x^2 - 4x - 21 = (x-7)(x+3)$ caso: 7

$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$

8) $6x^2 - 13x - 5 =$ (multiplicando por el coeficiente de x^2 todo el trinomio, tenemos:) caso: 8

$36x^2 - 6(13x) - 30 =$ (se deja indicado el producto por el segundo termino)

$(6x)^2 - 6(13x) - 30 =$ (se indica el primer termino en la potencia que corresponde)

$(6x)^2 - 13(6x) - 30 =$ (se invierte el orden de los factores numericos en el segundo termino)

$(6x-15)(6x+2) =$ (se factoriza como un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$)

$\dfrac{(6x-15)(6x+2)}{3 \cdot 2} =$ (se divide entre 6 los dos factores para no alterar el valor de la expresión)

$(2x-5)(3x+1)$

9) $8x^3 + 12ax^2 + 6a^2x + a^3 = (2x+a)^3$ caso: 9

$27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = (3x-1)^3$

EJERCICIOS: Factorizar.

a) $a^2 + ab =$ b) $15y^3 + 20y^2 - 5y =$ c) $25x^7 - 10x^5 + 15x^3 - 5x^2 =$

d) $27a^3 + b^3 =$ e) $9 - 6x + x^2 =$ f) $3a^2b + 6ab - 5a^3b^2 + 8a^2bx =$

g) $m^2 + 2m + 1 =$ h) $4a^2 - 9 =$ i) $x^2 + bx + \dfrac{b^2}{4} =$

j) $x^2 + 5x + 6 =$ k) $x^2 - y^2 =$ l) $4x^2 + 25y^2 - 20xy =$

m) $25 - 36x^4 =$ n) $25x^2y^4 - 121 =$ o) $100m^2n^4 - 169y^6 =$

p)	$\frac{1}{4}-\frac{b}{3}+\frac{b^2}{9}=$	q)	$x^2-5x+6=$	r)	$125a^3+150a^2b+60ab^2+8b^3=$
s)	$x^2-x-6=$	t)	$x^2-7x-30=$	u)	$x^4-5x^2-50=$
v)	$x^6+7x^3-144=$	w)	$6x^2-7x-3=$	x)	$2x^2+3x-2=$
y)	$3x^2-5x-2=$	z)	$6x^2+7x+2=$	1)	$20x^2+7x-6=$
2)	$x^3+1=$	3)	$a^3-8=$	4)	$x-x^2+x^3-x^4=$
5)	$8x^3-125=$	6)	$27m^6+64n^9=$	7)	$1+12a+48a^2+64a^3=$
8)	$x^3-27=$	9)	$64+a^6=$	10)	$m^3+3m^2n+3mn^2+n^3=$
11)	$8x^3-1=$	12)	$x^2+3x-10=$	13)	$27m^3+108m^2n+144mn^2+64n^3=$
14)	$2x^2-9x-5=$	15)	$49-n^8=$	16)	$12-x-x^2=$

METODO DE EVALUACION

Para descomponer un polinomio en factores, se aplica el **principio de divisibilidad por $x-a$**, el cual dice que si un polinomio entero y racional en x se anula para $x=a$, el polinomio es divisible por $x-a$.

EJEMPLO: Descomponer en factores por evaluación x^3+2x^2-x-2

NOTA: Los valores que se le deben de dar a la x son los *factores* del término independiente 2 que son $+1, -1, +2$ y -2. Si el polinomio se anula para $x=1$, $x=-1$, $x=2$ ó $x=-2$, significa que **el polinomio será divisible por x menos ese valor**.

Aplicando la división sintética, tenemos:

$$
\begin{array}{cccc|l}
1 & 2 & -1 & -2 & x=1 \\
 & 1\times 1=1 & 3\times 1=3 & 2\times 1=2 & \\
\hline
1 & 3 & 2 & 0 &
\end{array}
$$

0 (residuo). Por lo tanto el polinomio se anula para $x=1$

Entonces tenemos que x^3+2x^2-x-2 es divisible por $x-1$ y podemos escribir

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x^2+3x+2)$ pero x^2+3x+2 todavía se puede factorizar y tenemos que

$$\boxed{x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)}$$

EJEMPLO: Descomponer en factores por evaluación $x^4-11x^2-18x-8$

Los factores de 8 son $\pm(1, 2, 4, 8)$

Recordar que al escribir los coeficientes del polinomio dado hay que poner cero en el lugar correspondiente a los términos que falten.

Para $x = 1$, el polinomio **no se anula**.

Para $x = -1$, el polinomio **se anula**, entonces es divisible por $\boldsymbol{x - (-1) = x + 1}$, por lo tanto :

$$x^4 - 11x^2 - 18x - 8 = (x + 1)(x^3 - x^2 - 10x - 8)$$

Ahora es necesario descomponer $x^3 - x^2 - 10x - 8$ por el mismo método. El valor de $x = 1$, que no anuló al polinomio dado, no se prueba porque no puede anular a este polinomio. El valor de $x = -1$, que anuló al polinomio dado, se prueba nuevamente y se observa que **se anula**, por lo que $x^3 - x^2 - 10x - 8$ es divisible por $\boldsymbol{x + 1}$, entonces tenemos que:

$$x^4 - 11x^2 - 18x - 8 = (x + 1)(x + 1)(x^2 - 2x - 8)$$

(Factorizando el trinomio) $x^4 - 11x^2 - 18x - 8 = (x + 1)(x + 1)(x - 4)(x + 2)$

$$\boxed{x^4 - 11x^2 - 18x - 8 = (x + 1)^2 (x - 4)(x + 2)}$$

EJERCICIOS: Descomponer en factores por evaluación:

1. $x^3 + x^2 - x - 1$
2. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
3. $x^3 - 4x^2 + x + 6$
4. $m^3 - 12m + 16$
5. $2x^3 - x^2 - 18x + 9$

SOLUCION :
1. $(x - 1)(x + 1)^2$
2. $(x - 2)(x - 3)(x + 2)$
3. $(x + 1)(x - 2)(x - 3)$
4. $(m - 2)^2(m + 4)$
5. $(x - 3)(x + 3)(2x - 1)$

III. 5. OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Para el caso de expresiones algebraicas, el mínimo común múltiplo será el producto de todos los factores diferentes (considerados cada uno de ellos primos entre si), tomado cada uno con su mayor exponente.

MINIMO COMUN MULTIPLO: (monomios).

EJEMPLOS: Hallar el m.c.m. de.

$ax^2,\ a^3x$	m.c.m. $= a^3x^2$
$8ab^2c,\ 12a^3b^2$	m.c.m. $= 24a^3\ b^2c$
$10a^3x,\ 36a^2mx^2,\ 24b^2m^4$	m.c.m. $= 360a^3b^2m^4x^2$

MINIMO COMUN MULTIPLO: (polinomios).

EJEMPLOS: Hallar el m.c.m. de.

$6,\ 3x-3$	$\text{m.c.m.} = 2\cdot 3(x-1) = 6(x-1)$
$14a^2,\ 7x-21$	$\text{m.c.m.} = 14a^2(x-3)$
$4ax^2-8axy+4ay^2,\ 6b^2x-6b^2y$	$\text{m.c.m.} = 12ab^2(x-y)^2$

EJERCICIOS: Hallar el m.c.m. de.

1) $3x^2y^3z,\ 4x^3y^3z^2,\ 6x^4$
2) $5x^2,\ 10xy,\ 15xy^2$
3) $24a^2x^3,\ 36a^2y^4,\ 40x^2y^5,\ 10a^3b^2$
4) $15x^2,\ 10x^2+5x,\ 45x^3$

5) $8a^2b,\ 4a^3-4a,\ 6a^2-12a+6$
6) $24a^3x,\ 18xy^2,\ 2x^3+2x^2-40x, 8x^4-200x^2$
7) $28x,\ x^2+2x+1,\ x^2+1,\ 7x^2+7,\ 14x+14$
8) $m^2-mn,\ mn+n^2,\ m^2-n^2$
9) $(a-b)^2,\ a^2-b^2,\ (a+b)^2,\ a^2+b^2$
10) $(x+1)^3,\ x^3+1,\ x^2-2x-3,$
11) $(x-y)^3,\ x^3-y^3,\ x^3-xy^2+x^2y-y^3$
12) $15x^3+20x^2+5x,\ 3x^3-3x+x^2-1$

SIMPLIFICACION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

DEFINICION: ***Fracción algebraica***, es el cociente indicado de dos expresiones algebraicas.

DEFINICION: ***Simplificar una fracción***, es convertirla en una fracción equivalente cuyos términos (numerador y denominador), sean primos entre si.

Regla para simplificar una fracción cuyos términos sean primos entre si:

Se divide el numerador y el denominador por sus factores comunes, hasta que sean primos entre si.

EJEMPLOS: Simplificar.

$$\frac{4a^2b^5}{6a^3b^3m}=\frac{2\cdot 1\cdot b^2}{3\cdot a\cdot 1\cdot m}=\boxed{\frac{2b^2}{3am}}\qquad\qquad \frac{9x^3y^3}{36x^5y^6}=\frac{1\cdot 1\cdot 1}{4\cdot x^2\cdot y^3}=\boxed{\frac{1}{4x^2y^3}}$$

Regla para simplificar fracciones cuyos términos sean polinomios:

Se descomponen en factores los polinomios todo lo posible y se suprimen los factores comunes al numerador y denominador.

EJEMPLOS: Simplificar.

$$\frac{2a^2}{4a^2-4ab}=\frac{2a^2}{4a(a-b)}=\boxed{\frac{a}{2(a-b)}}\qquad\qquad \frac{4x^2y^3}{24x^3y^3-36x^3y^4}=\frac{4x^2y^3}{12x^3y^3(2-3y)}=\boxed{\frac{1}{3x(2-3y)}}$$

EJERCICIOS: Simplificar.

a) $\dfrac{9x^2y^3}{24a^2x^3y^4}=$ b) $\dfrac{x^2-5x+6}{2ax-6a}=$

c) $\dfrac{8a^3+27}{4a^2+12a+9}=$ d) $\dfrac{a^3-25a}{2a^3+8a^2-10a}=$

e) $\dfrac{(a^2-1)(a^2+2a-3)}{(a^2-2a+1)(a^2+4a+3)}=$ f) $\dfrac{3x^2-4x-15}{x^2-5x+6}=$

REDUCCCION DE FRACCIONES AL MINIMO COMUN DENOMINADOR

Dos o más fracciones se pueden convertir en fracciones equivalentes con un denominador común, y el mínimo de estos será el m.c.m. de los denominadores.

EJEMPLO: Reducir $\dfrac{2}{a},\ \dfrac{3}{2a^2},\ \dfrac{5}{4x^2}$ al mínimo común denominador.

$$m.c.m.=4a^2x^2\qquad\qquad \boxed{\frac{8ax^2}{4a^2x^2},\ \frac{6x^2}{4a^2x^2},\ \frac{5a^2}{4a^2x^2}}$$

EJEMPLO: Reducir $\dfrac{a-b}{ab},\ \dfrac{2a}{ab+b^2},\ \dfrac{3b}{a^2+ab}$ al mínimo común denominador.

$$m.c.m.=ab(a+b)\qquad\qquad \boxed{\frac{a^2-b^2}{ab(a+b)},\ \frac{2a^2}{ab(a+b)},\ \frac{3b^2}{ab(a+b)}}$$

OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

SUMA

a) $\dfrac{3}{2a}+\dfrac{a-2}{6a^2}=\dfrac{9a+a-2}{6a^2}=\dfrac{10a-2}{6a^2}=\dfrac{2(5a-1)}{6a^2}=\boxed{\dfrac{5a-1}{3a^2}}$

b) $\dfrac{1}{3x+3}+\dfrac{1}{2x-2}+\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{2(x-1)+3(x+1)+3\cdot 2}{6(x+1)(x-1)}=\dfrac{2x-2+3x+3+6}{6(x+1)(x-1)}=\boxed{\dfrac{5x+7}{6(x+1)(x-1)}}$

RESTA

a) $\dfrac{a+2b}{3a}-\dfrac{4ab^2-3}{6a^2b}=\dfrac{2ab(a+2b)-(4ab^2-3)}{6a^2b}=\dfrac{2a^2b+4ab^2-4ab^2+3}{6a^2b}=\boxed{\dfrac{2a^2b+3}{6a^2b}}$

b) $\dfrac{2}{x+x^2}-\dfrac{1}{x-x^2}-\dfrac{1-3x}{x-x^3}=\dfrac{2(1-x)-(1+x)-(1-3x)}{x(1+x)(1-x)}=\dfrac{2-2x-1-x-1+3x}{x(1+x)(1-x)}=\dfrac{0}{x(1+x)(1-x)}=\boxed{0}$

MULTIPLICACION

a) $\dfrac{2a}{3b^3}\cdot\dfrac{3b^2}{4x}\cdot\dfrac{x^2}{2a^2}=\dfrac{2\cdot 3\cdot a\cdot b^2-x^2}{3\cdot 4\cdot 2\cdot a^2\cdot b^3\cdot x}=\boxed{\dfrac{x}{4ab}}$

b) $\dfrac{3x-3}{2x+4}\cdot\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-x}=\dfrac{3\cancel{(x-1)}(x+2)^{\cancel{2}}}{2\cancel{(x+2)}x\cancel{(x-1)}}=\dfrac{3(x+2)}{2x}=\boxed{\dfrac{3x+6}{2x}}$

DIVISION

a) $\dfrac{4a^2}{3b^2}\div\dfrac{2ax}{9b^3}=\dfrac{4\cdot a^2\cdot 9\cdot b^3}{3\cdot b^2\cdot 2\cdot a\cdot x}=\boxed{\dfrac{6ab}{x}}$

b) $\dfrac{x^2+4x}{8}\div\dfrac{x^2-16}{4}=\dfrac{x\cancel{(x+4)}4}{8\cancel{(x+4)}(x-4)}=\boxed{\dfrac{x}{2(x-4)}}$

EJERCICIOS: Efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

1) $\dfrac{4}{a}+\dfrac{3}{2ab}=$

2) $\dfrac{3a}{a+1}-\dfrac{5}{a^2+2a+1}=$

3) $\dfrac{5}{1}+\dfrac{1}{x}=$

4) $\dfrac{5x}{x^2-4}+\dfrac{x}{x-2}=$

5) $\dfrac{5}{2a}+\dfrac{6}{a^3}=$

6) $\dfrac{a-1}{a^2-4}+\dfrac{a-2}{a^2-a-6}+\dfrac{a+6}{a^2-5a+6}=$

7) $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{2x^3}{3}\cdot\dfrac{6}{5}=$

8) $\dfrac{x-2}{x^2-x}-\dfrac{x+3}{x^2+3x-4}+\dfrac{x^2+12x+16}{x^4+3x^3-4x^2}=$

9) $\dfrac{ab}{c}\cdot\dfrac{c^2}{3a^2b}\cdot\dfrac{1}{abc}=$

10) $\dfrac{a^2-1}{a^2+2a}\cdot\dfrac{a^2-a-6}{3a^2+7a+4}\cdot\dfrac{3a+4}{a^2-4a+3}=$

11) $\dfrac{5}{x-4}\cdot\dfrac{x^2-16}{10}\cdot\dfrac{x+4}{2}=$

12) $\dfrac{a^2b}{5c}\div\dfrac{3c^2}{10ab}=$

13) $\dfrac{3x^2}{5}\div\dfrac{x}{5}=$

14) $\dfrac{x^2+4x}{8}\div\dfrac{x^2-16}{4}=$

15) $\dfrac{abc}{8}\div\dfrac{3a^2b}{4}=$

16) $\dfrac{x-1}{x^2-5x+4}\div\dfrac{x-1}{x-4}=$

17) $\dfrac{1-\dfrac{2}{3x}}{\dfrac{3}{x}+4}=$

18) $\dfrac{x^3+125}{x^2-64}\div\dfrac{x^3-5x^2+25x}{x^2+x-56}=$

19) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x+1}}{1-\dfrac{1}{x-1}}=$

20) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{a-b}{b}}{\dfrac{1}{ab}}=$

III.6. ECUACIONES

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

DEFINICION: ***Una ecuación***, es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas variables o incógnitas y que solo se verifica o es verdadera para determinados valores de las variables.

POSTULADOS DE LA IGUALDAD

Reflexiva: Si $x \in \boldsymbol{R}$, $\Rightarrow$ $x = x$

Simétrica: Si $x, y \in \boldsymbol{R}$, $x = y$, $\Rightarrow$ $y = x$

Transitiva: Si $x, y, z \in \boldsymbol{R}$, $x = y$, $y = z$, $\Rightarrow$ $x = z$

Aditiva: Si $x, y, z \in \boldsymbol{R}$, $x = y$, $\Rightarrow$ $x + z = y + z$

Multiplicativa: Si $x, y, z \in \boldsymbol{R}$, $x = y$, $\Rightarrow$ $x \cdot z = y \cdot z$

Sustitución: Si $x = y$, entonces en cualquier proposición que contenga "x" podemos escribir "y" en su lugar y viceversa, sin afectar el valor de la proposición.

AXIOMA FUNDAMENTAL DE LAS ECUACIONES

Si con cantidades iguales se verifican operaciones iguales, los resultados serán iguales.

ECUACIONES ENTERAS CON UNA INCOGNITA

EJEMPLO:

$$5x = 8x - 15$$
$$8x - 15 = 5x$$
$$8x - 5x = 15$$
$$3x = 15$$
$$x = 15 / 3$$
$$\boxed{x = 5}$$

ECUACIONES ENTERAS CON SIGNOS DE AGRUPACION

EJEMPLO:

$$3x - (2x - 1) = 7x - (3 - 5x) + (-x + 24)$$
$$3x - 2x + 1 = 7x - 3 + 5x - x + 24$$
$$3x - 2x - 7x - 5x + x = -3 + 24 - 1$$
$$4x - 14x = 24 - 4$$
$$-10x = 20$$
$$x = \frac{20}{-10} = \boxed{-2}$$

ECUACIONES ENTERAS CON PRODUCTOS INDICADOS

EJEMPLO:

$$10(x-9)-9(5-6x)=2(4x-1)+5(1+2x)$$
$$10x-90-45+54x=8x-2+5+10x$$
$$10x+54x-8x-10x=-2+5+90+45$$
$$54x-8x=140-2$$
$$46x=138$$
$$x=\frac{138}{46}=\boxed{3}$$

ECUACIONES CON DENOMINADORES.

EJEMPLOS:

$$\frac{x}{2}=\frac{x}{6}-\frac{1}{4} \qquad \text{m.c.m. de los denominado res}=12$$
$$12\left(\frac{x}{2}\right)=12\left(\frac{x}{6}-\frac{1}{4}\right)$$
$$6x=2x-3$$
$$6x-2x=-3$$
$$4x=-3$$
$$\boxed{x=-\frac{3}{4}}$$

$$\frac{3}{2x+1}-\frac{2}{2x-1}-\frac{x+3}{4x^2-1}=0 \qquad \text{m.c.m. de los denominado res}=(2\text{x}-1)(2x+1)$$

$$(2x-1)(2x+1)\left(\frac{3}{2x+1}-\frac{2}{2x-1}-\frac{x+3}{4x^2-1}\right)=(2x-1)(2x+1)0$$

$$3(2x-1)-2(2x+1)-(x+3)=0$$
$$6x-3-4x-2-x-3=0$$
$$6x-5x=8$$
$$\boxed{x=8}$$

EJERCICIOS: Resolver.

1) $y-5=3y-25$

2) $71+[-5x+(-2x+3)]=25-[-(3x+4)-(4x+3)]$

3) $11x+5x-1=65-36$

4) $5(1-x)^2-6(x^2-3x-7)=x(x-3)-2x(x+5)-2$

5) $\frac{3x}{5}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{5}=0$

6) $\frac{x-2}{x^2+2x-3}-\frac{x+1}{x^2-9}=\frac{4}{x^2-4x+3}$

7) $\frac{5}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}$

8) $\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10x}=\frac{1}{5}$

9) $\frac{10x^2-5x+8}{5x^2+9x-19}=2$

10) $\frac{3x}{4}-\frac{1}{5}+2x=\frac{5}{4}-\frac{3x}{20}$

11) $\frac{2x-9}{10}+\frac{2x-3}{2x-1}=\frac{x}{5}$

12) $2x-\frac{5x-6}{4}+\frac{1}{3}(x-5)=-5x$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

DEFINICION: Una ***ecuación de segundo grado***, es toda ecuación en la cual, una vez simplificada, el mayor exponente de la incógnita es dos.

$$METODOS: \begin{cases} \text{Fórmula General} \\ \\ \text{Factorización} \end{cases}$$

FORMA GENERAL DE UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO $ax^2+bx+c=0$

- Toda ecuación de segundo grado después de alguna transformación, puede llevarse a la forma general anterior.

FORMULA GENERAL

- A partir de la forma general de la ecuación de segundo grado, aplicando las propiedades de la igualdad y haciendo uso de los productos notables, finalmente la incógnita x queda despejada en la llamada ***fórmula general*** para resolver las ecuaciones de segundo grado.

Empezamos por agrupar en un sólo miembro de la igualdad, a los términos que contienen la incógnita.

$$x^2+bx=-c$$

Dividimos toda la ecuación entre a, para que el coeficiente del término de segundo grado sea 1.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

En el primer miembro completamos un trinomio cuadrado perfecto, sumando la mitad del coeficiente del término de primer grado, elevado al cuadrado, en ambos miembros.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

En el primer miembro, factorizamos como el correspondiente binomio al cuadrado y en el segundo miembro simplificamos con un común denominador.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

A continuación extraemos raíz cuadrada en ambos miembros, obteniendo.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Despejando x obtenemos la fórmula general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Una ecuación de segundo grado, siempre tendrá dos raíces, x_1 y x_2 las cuales pueden ser reales o complejas, de acuerdo con el valor del ***discriminante*** $(b^2 - 4ac)$, el cual involucra a los coeficientes a, b y c. Pueden presentándose tres casos:

a) Si el discriminante es igual a cero, las dos raíces son reales e iguales.

EJEMPLO: Resolver la ecuación $2x^2 - 8x + 8 = 0$

El discriminante es: $(-8)^2 - 4(2)(8) = 64 - 64 = 0$

$$x_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{(-8)^2 - 4(2)(8)}}{2(2)} = \frac{8}{4} = \boxed{2}$$

Raíces:

$$x_2 = \frac{-(-8) - \sqrt{(-8)^2 - 4(2)(8)}}{2(2)} = \frac{8}{4} = \boxed{2}$$

b) Si el discriminante es mayor que cero, las dos raíces serán reales y diferentes.

EJEMPLO: Resolver la ecuación $3x^2 - 7x + 2 = 0$

El discriminante es: $(-7)^2 - 4(3)(2) = 49 - 24 = 25 > 0$

Entonces: $$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6}$$

Raíces:
$$x_1 = \frac{7+5}{6} = \boxed{2} \; ; \quad x_2 = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

c) Si el discriminante es menor que cero, las raíces serán complejas y conjugadas.

EJEMPLO: Resolver la ecuación $5x^2 + 5x + 5 = 0$

El discriminante es: $(5)^2 - 4(5)(5) = 25 - 100 = -75 < 0$

Raíces:
$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{5^2 - 4(5)(5)}}{2(5)} = \frac{-5 + 5\sqrt{3}\,i}{10} = \boxed{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}}$$
$$x_2 = \frac{-5 - \sqrt{5^2 - 4(5)(5)}}{2(5)} = \frac{-5 - 5\sqrt{3}\,i}{10} = \boxed{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,i}{2}}$$

SOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO POR DESCOMPOSICION EN FACTORES.

Es un método muy rápido, que se basa en descomponer en factores el primer miembro de una ecuación de la forma $x^2 + bx + c = 0$ o $ax^2 + bx + c = 0$. La técnica consiste en que si *p* y *q* son dos números reales tales que $pq = 0$, entonces $p = 0$ o bien $q = 0$. De ahí que este tipo de ecuaciones pueda expresarse como el producto de dos polinomios de primer grado y encontrar soluciones igualando a cero, como se indica en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS:

a) Resolver la ecuación $3x^2 - 7x + 2 = 0$

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$
$$3x^2 - 6x - x + 2 = 0$$
$$3x(x-2) - (x-2) = 0$$
$$(x-2)(3x-1) = 0$$
$$x - 2 = 0 \; ; \; 3x - 1 = 0$$
$$x_1 = \boxed{2}; \quad x_2 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

b) Resolver la ecuación $x^2 + 16 = 8x$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$
$$(x-4)^2 = 0$$
$$(x-4)(x-4) = 0$$
$$x - 4 = 0 \ ; \ x - 4 = 0$$
$$\boxed{x_1 = 4} \ ; \boxed{x_2 = 4}$$

Como podemos observar, en la solución anterior aparece $x - 4$ como factor dos veces, por lo cual, al número real 4 se le llama **raíz doble**.

EJERCICIOS:

1) $x^2 + 5x - 24 = 0$
2) $x^2 + 7x = 18$
3) $8x - 65 = -x^2$
4) $2x^2 + 7x - 4 = 0$
5) $6x^2 = 10 - 11x$
6) $3x^2 - 5x + 2 = 0$
7) $x^2 - 6x - 16 = 0$
8) $y^2 - 4y = 3$
9) $x^2 + 3x - 180 = 0$
10) $x^2 - 6x + 8 = 0$
11) $a^2 - 7a + 12 = 0$
12) $6t^2 - 5t - 6 = 0$
13) $\dfrac{6}{x^2} - \dfrac{9}{x} = \dfrac{74}{x}$
14) $x(x-1) - 5(x-2) = 2$

VALOR ABSOLUTO

DEFINICION: Si a es un número real, el *valor absoluto* de a se define como

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

EJEMPLOS: $|3| = 3$, $|0| = 0$, $|-3| = -(-3) = 3$

$|3x + 2| = 5$ por definición $3x + 2 = 5$ ó $3x + 2 = -5$ de donde tenemos:

$$3x = 5 - 2 \qquad 3x = -5 - 2$$
$$x = \frac{3}{3} \qquad 3x = -7$$
$$\boxed{x = 1} \qquad \boxed{x = \frac{-7}{3}}$$

- Se puede comprobar que ambos resultados satisfacen la ecuación dada, sustituyendo el valor de x en la misma.

EJECICIOS: Resolver para x

1. $|2x-3|=5$ **SOL:** $x=4, \quad x=-1$
2. $|3-7x|=4$ **SOL:** $x=1, \quad x=-\dfrac{1}{7}$
3. $|3x-2|=4-x$ **SOL:** $x=-1, \quad x=\dfrac{3}{2}$
4. $|x-3|+7=0$ **SOL:** No tiene solución
5. $\left|\dfrac{x}{2}-5\right|=2$ **SOL:** $x=14, \quad x=6$